Prova substitutiva - Álgebra linear

07/02/2023

Questão 2:

a) F

Se T for sobrejetora, então
$$\dim \operatorname{Im} T = \dim P_4(\mathbb{R}) = 5.$$
Daí pelo teorema do Núcleo e da Imagem, teríamos.

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$
$$4 = \dim N(T) + 5$$
e então teríamos $\dim N(T) = -1$, um absurdo.

———— // ————

b) F

Considere, por exemplo
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Note que,

$$T(A+B) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

mas

$$T(A)+T(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

—————— // ——————

e) F

sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,-3,4) + b(3,2,1) + c(1,-1,2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+3b+c=0 \\ -3a+2b-c=0 \\ 4a+b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a + 3b + c = 0$$

$$11b + 2c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{11}{2}b}$$

$$a = \frac{11b}{2} - 3b \Rightarrow \boxed{a = \frac{5b}{2}}$$

Solução $\left\{ \left(\frac{5b}{2}, b, -\frac{11}{2}b \right), b \in \mathbb{R} \right\}$

Portanto, S é um conjunto L.D

——— // ———

d) F

Considere por exemplo, o vetor $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$

Pela definição dada, temos

$$1 \circ v = 1 \circ (1,2) = (1 \cdot 2, 1 \cdot 1) = (2,1) \neq v.$$

——— // ———

e) F

Note que, o vetor nulo

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ não pertence a W.

——— // ———

f) V

- $W \neq \emptyset$, já que, para $a=b=0$, temos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.
- Por definição, $W \subset M_2(\mathbb{R})$.
- Sejam $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in W$ e $k \in \mathbb{R}$. Daí

$$A+B = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \in W \text{ e}$$

$$kA = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix} \in W.$$

Questão 3:

a) V W_1: $\begin{cases} x+y = w-z \\ y+w=0 \Rightarrow y=-w \end{cases}$

$x - w = w - z \Rightarrow x = 2w - z$

$W_1 = \{(2w - z, -w, z, w) : w, z \in \mathbb{R}\}$
$= \{(2w, -w, 0, w) + (-z, 0, z, 0) : z, w \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (2, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) \rangle$
$\Rightarrow \dim W_1 = 2$

$W_2 : \begin{cases} x = y = 0 \\ 2w + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -2w$

$W_2 = \{(0, 0, -2w, w) : w \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (0, 0, -2, 1) \rangle$
$\Rightarrow \dim W_2 = 1$

$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, w) : x + y = w - z,\ y + w = 0,$
$x = y = 0,\ 2w + z = 0\}$

$\begin{cases} x + y = w - z \\ y + w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0} \\ \boxed{x = y = 0} \\ 2w + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = 0}$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0,0)\}$

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= 2 + 1 - 0$$
$$= 3$$

---

b) $\checkmark$

$[D]_\alpha^\beta$:

$$D(1+x) = 1 = \underbrace{1}.1 + \underbrace{0}.x + \underbrace{0}.x^2$$

$$D(1-x) = -1 = \underbrace{-1}.1 + \underbrace{0}.x + \underbrace{0}.x^2$$

$$D(x^2) = 2x = \underbrace{0}.1 + \underbrace{2}.x + \underbrace{0}.x^2$$

$$[D]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

e) V.

Vejamos se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto L.I. Caso seja, então teremos, de fato, $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, já que, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,2,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + c = 0 & \Rightarrow a = -c \\ a - b + c = 0 & \Rightarrow \boxed{c = 0} \\ b + c = 0 & \Rightarrow b = -c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = 0.$$

Portanto, o conjunto é LI e, portanto, base de $\mathbb{R}^3$.

---

d) √

$T(1,0,0) = (1, 1, 2)$

$T(0,1,0) = (1,-1,1)$ $\quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T(0,0,1) = (0,2,-1)$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 4 + (1+\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 3 + 3\lambda \\ &= (1+\lambda)\left(1-\lambda^2+3\right) \\ &= (1+\lambda)(2+\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

$p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda = -1$ ou $\lambda = -2$ ou $\lambda = 2$

Como T possui 3 autovalores distintos e é um operador sobre um espaço de dimensão 3, então T é diagonalizável.

—————— // ——————

e) V

$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x - 4y + 3z = 0 \\ 5x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 & \Rightarrow y = -3x \\ -2x - 4y + 3z = 0 & \Rightarrow y = z \\ 3x + z = 0 & \Rightarrow z = -3x \end{cases}$$

$$-2x - y = 0 \Rightarrow -2x + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow y = z = 0$$

$\therefore$ $N(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow T$ é injetora

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$$

$$3 = 0 + \dim Im(T)$$

$\Rightarrow \dim Im(T) = 3 \Rightarrow Im(T) = \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow T$ é sobrejetora

Portanto, T é bijetora e daí é um isomorfismo.

//