UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 11: Homomorfismos de anéis

(1) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismos de anéis. Mostre que $g \circ f : A \to C$ é um homorfismo do anel A em C.

(2) Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que:

(a) $Im\, f$ é um subanel de B;

(b) $Ker\, f$ é um ideal de A;

(c) f é injetivo se e somente se $Ker\, f = \{0\}$.

(3) Calcule $End(\mathbb{Z}[i])$ e $Aut([\mathbb{Q}[i])$.

(4) Mostre que $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é um monomorfismo de anéis, isto é, é um homomorfismo injetivo.

(5) Sejam $A = \{a + b\sqrt{-2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $B = M_2(\mathbb{Q})$. Mostre que $f : A \to B$ dada por $f(a + b\sqrt{-2}) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$ é um homomorfismo. f é isomorfismo? Justifique.

(6) Prove que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos.

(7) Seja A um anel. Mostre que

(a) se $f, g \in End(A)$ então $(f+g) \in End(A)$, onde $(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad \forall\, x \in A$.

(b) se $f, g \in End(A)$ então $(f \cdot g) \in End(A)$, onde $(f \cdot g)(x) = f(g(x)), \quad \forall\, x \in A$.

(c) $(\text{End}(A), +, \cdot)$ é um anel com as operações definidas em (a) e (b).

(8) Sejam A e B anéis. Defina $+$ e $\cdot$ no conjunto $A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, b \in B\}$ de modo que $A \times B$ seja um anel com essas operações.

(9) Se $A \times B$ é o anel definido no exercício anterior. Prove que

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : A \times B & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \pi_2 : A \times B & \to & B \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}$$

são epimorfismos, isto é, homomorfismos sobrejetivos. Calcule os núcleos de π_1 e π_2.

(10) Seja $f : A \to B$ um homomorfismo e J um ideal de B. Prove que

$$f^{-1}(J) = \{a \in A : \, f(a) \in J\}$$

é um ideal de A.

(11) Seja $F : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(f) = f(\frac{1}{2})$, para todo $f \in \mathcal{C}[0,1]$.

(a) Prove que F é um homomorfismo.

(b) Calcule $Im\, F$ e $Ker\,(F)$.

(c) Identifique o anel $\dfrac{\mathcal{C}[0,1]}{Ker\,(F)}$.

(12) Sejam A e B anéis, $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis e I um ideal do anel A. Defina a função

$$\begin{array}{rccc} h: & \dfrac{A}{I} & \to & \dfrac{B}{f(I)} \\ & a+I & \mapsto & f(a)+f(I). \end{array}$$

Mostre que h é um isomorfismo entre os anéis $\dfrac{A}{I}$ e $\dfrac{B}{f(I)}$

(13) Seja A um anel com unidade $1 \in A$. E seja $e \in A$, $e \neq 0$ tal que $e^2 = e$ (e diz-se um elemento **idempotente** de A). Se $A_1 = A \cdot e = \{a \cdot e : \; a \in A\}$ e se $A_2 = A \cdot (1-e) = \{a - a \cdot e : \; a \in A\}$, então mostre que:

(a) A_1 e A_2 são subanéis de A tais que $A_1 \cap A_2 = \{0\}$.

(b) $A = A_1 \oplus A_2$ (isto é, para todo $a \in A$, existem únicos elementos $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tais que $a = a_1 + a_2$).

(14) Seja A um anel com unidade $1 \in A$ e sejam $e_1, e_2, \ldots, e_n \in A \setminus \{0\}$ idempotentes de A tais que $1 = e_1 + \ldots + e_n$, $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Mostre que, se $A_i = A \cdot e_i = \{a \cdot e_i : \; a \in A\}$ então $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ (isto é, para todo $a \in A$, existem únicos elementos $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, tais que $a = a_1 + \ldots + a_n$).