UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 7: Subespaços vetoriais - Parte II

Ementa: Operações com subespaços vetoriais; intersecção e soma de subespaços; subespaço vetorial gerado; espaços vetoriais finitamente gerados.
Objetivos: Entender as principais operações que podem ser realizadas entre subespaços vetoriais.

1 Operações com subespaços

Dados U e W subespaços de um espaço vetorial V, a **interseção** $U \cap W$ ainda é um subespaço de V. De fato,

- $U \cap W$ é sempre diferente de vazio, já que os dois subespaços contém o vetor nulo;
- Dados $u, w \in U \cap W$, u, w pertencem a U e também a W, que são subespaços. Logo $u + w$ pertence a U e W. Portanto $u + w \in U \cap W$;
- Dados $u \in U \cap W$ e $a \in \mathbb{R}$, como u pertence a U e W que são subespaços vetoriais, então au pertence a U e a W simultaneamente. Logo $au \in U \cap W$.

Portanto a interseção de subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial.

Observação 1.1 *A união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é, necessariamente, um subespaço de V.*

Exemplo 1 *Sejam os subespaços $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. A união entre U e W será o conjunto:*

$$U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$$

O elemento neutro $(0, 0)$ está em U e em W e logo, está também na união. Consideremos os vetores $u = (1, 0) \in U$ e $w = (0, 1) \in W$.

Temos que $u, w \in U \cup W$, mas $u + w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$, que é um vetor que não satisfaz nenhuma das condições do conjunto união, logo $u + w \notin U \cup W$.

Dados U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, a **soma** dos subespaços U e W é dada pelo conjunto

$$U + W = \{v \in V : \ v = u + w, \ u \in U, \, w \in W\},$$

que é um subespaço vetorial de V. De fato,

- $U+W$ é sempre diferente de vazio, já que os dois subespaços contém o vetor nulo, logo $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in U + V$;

- Dados $v_1, v_2 \in U+W$, então $v_1 = u_1+w_1$ e $v_2 = u_2+w_2$, com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Daí
$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W;$$

- Dados $v \in U + W$ e $a \in \mathbb{R}$, com $v = u + w$ e $u \in U$, $w \in W$, como U e W são subespaços vetoriais, então $au \in U$ e $aw \in W$, daí
$$av = au + aw \in U + W.$$

Portanto a soma de subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial.

Definição 1.1 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. O espaço vetorial V é dito **soma direta** de U e W, e é representado por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.*

Exemplo 2 *Dado o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, verifique se a soma dos subespaços $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $W\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, é uma soma direta, ou seja, $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.*

Temos que os elementos de U são da forma $(x, 0) = x(1, 0)$, para $x \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto U é gerado pelo elemento (1,0), isto é, $U = [(1, 0)]$. De mesmo modo, um elemento de W é da forma $(0, y) = y(0, 1)$, para $y \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto W é gerado pelo elemento (0,1), isto é $W = [(0, 1)]$.

Note que, a intersecção entre U e W é o elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $U \cap W = \{(0, 0)\}$. Além disso, $U + W = \mathbb{R}^2$, já que qualquer elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Assim, temos $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

2 Subespaço vetorial gerado

Seja V um espaço vetorial e considere S um subconjunto de V, não necessariamente sendo um subespaço vetorial. Por exemplo,

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V.$$

Uma **combinação linear** dos elementos de S é qualquer soma de vetores da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i. Denotemos por $G(S)$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S. O conjunto $G(S)$ assim construído, é um subespaço vetorial de V chamado **subespaço gerado** pelo conjunto S e simbolicamente temos

$$G(S) = \{v \in V : \ v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, \ \ a_i \in \mathbb{R}, \, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados **geradores** do subespaço $G(S)$ e S é chamado o **conjunto gerador** de $G(S)$.

Definição 2.1 *Um espaço vetorial V é* ***finitamente gerado*** *se existe um conjunto finito de vetores que geram V, isto é, $V = G(S)$, com S sendo um conjunto finito.*

Exemplo 3 *Considere o espaço das matrizes 2×2, denotado por $M_2(\mathbb{R})$ e observe que este é finitamente gerado. Seja S o conjunto dado por*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Note que S gera $M_2(\mathbb{R})$ já que $\forall \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3 Exercícios

(1) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 2)\} \in \mathbb{R}^2$ gera o subespaço $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

(2) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 0), (1, 1)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

(3) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $S = \{(2, 1, 0), (0, 3, 4)\}$.

(4) Sejam $W_1 = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(c, c, c) : c \in \mathbb{R}\}$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$? Se a resposta for não, determine $W_1 + W_2$.

b) $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?

(5) Dados $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, sejam W_1 *e* W_2 as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e contêm $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, respectivamente.

a) $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$? Se a resposta for não, determine $W_1 + W_2$.

b) $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$?

(6) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$ subespaços vetoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $W_1 + W_2$ é soma direta?

(7) Sejam $W_1 = [(1,0,1),(0,1,1)]$ e $W_2 = [(1,1,1),(1,0,0)]$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(8) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : onde\ a = d\ e\ b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : onde\ a = c\ e\ b = d \right\}$ subespaços vetoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(9) Encontre geradores de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

(10) Encontre geradores de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.