UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: ***Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II***
Prof. ***Victor Martins***

Gabarito Prova 1 (modelo 2)

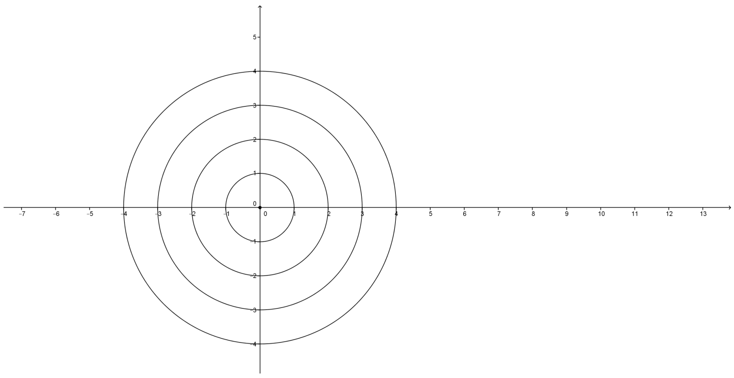
Questão 1:

(a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$.

(b) As curvas de nível de f são dadas por

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k, \quad k \geq 0,$$

isto é, para cada $k \geq 0$ a curva de nível correspondente terá equação $x^2 + y^2 = k^2$, sendo esta a origem no caso $k = 0$ e circunferências centradas na origem nos demais casos.



(c)

$$f_{xx}(x, y) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$f_{xy}(x, y) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = f_{yx}(x, y).$$

Questão 2:

(a) A função f será contínua em $(0, 0)$ se verificarmos que

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Temos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}.$$

Ao longo do eixo $y\,(x=0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y^5} = 0$$

Ao longo da curva $y = -x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^5 - x^5}{x^5 + x^5} = -1$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe e daí a função não é contínua em $(0,0)$.

(b) f é contínua para qualquer ponto (x_0, y_0) tal que $x_0 \neq y_0$, pois neste caso $f(x_0, y_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Questão 3:

(a) Regra dos dois Caminhos: Se $f(x,y) \to L_1$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

(b) (i) A função f será contínua em $(0,0)$ se verificarmos que

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Temos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + 4y^3}{x^2 + y^2}.$$

O limite não existe. Note, por exemplo, que se calcularmos o limite ao longo do caminho $y = 0$, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 4y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$$

Mas este último limite não existe, já que os limites laterais são distintos.

(ii) Para $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^3}{h^2}}{h} = 4.$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f_x(x,y) = \frac{-x^2 + y^2 - 8xy^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f_y(x,y) = \frac{4y^4 + 12x^2y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2 + y^2 - 8xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{para quaisquer} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^4 + 12x^2y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 4, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Questão 4:

(a) Seja $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2$ e observe que a superfície dada no enunciado do exercício é dada por $F(x,y,z) = 16$. A equação do plano tangente a essa superfície no ponto (a,b,c)é dada por:

$$\nabla F(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0$$

Note que

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, -4y, -8z) \Rightarrow \nabla F(a,b,c) = (2a, -4b, -8c).$$

e queremos que este vetor seja paralelo a

$$(4, -2, 4),$$

isto é, queremos que sejam satisfeitas as seguintes condições para algum *lambda* real

$$2a = 4\lambda \Rightarrow a = 2\lambda$$

$$-4b = -2\lambda \Rightarrow b = \frac{1}{2}\lambda$$

$$-8c = 4\lambda \Rightarrow c = -\frac{1}{2}\lambda.$$

Escolhendo $\lambda = 1$ temos que o plano tangente procurado é

$$(4,-2,4) \cdot \left(x - 2, y - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y + 4z = 5$$

(b) Seja $F(x,y,z) = e^{(x+y+z)} + xyz$ Pelo Teorema da Função Implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(e^{(x+y+z)} + yz)}{(e^{(x+y+z)} + xy)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(e^{(x+y+z)} + xz)}{(e^{(x+y+z)} + xy)}$$

Questão 5:

(a) Seja $u = (a, b)$, com $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Temos

$$D_u f(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot u = (8,6) \cdot u = 8a + 6b.$$

Queremos que sejam satisfeitas as condições:

$$\begin{cases} 8a + 6b = 6 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow (a,b) \in \left\{(0,1), \left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)\right\}$$

(b) A temperatura decresce mais rapidamente na mesma direção do vetor gradiente no ponto dado, porém em sentido contrário. Logo na direção do vetor $-\nabla f(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$.

$$\nabla f(x,y,z) = (6x, -10y, 4z) \Rightarrow -\nabla f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) = 2(-1, 1, -1).$$

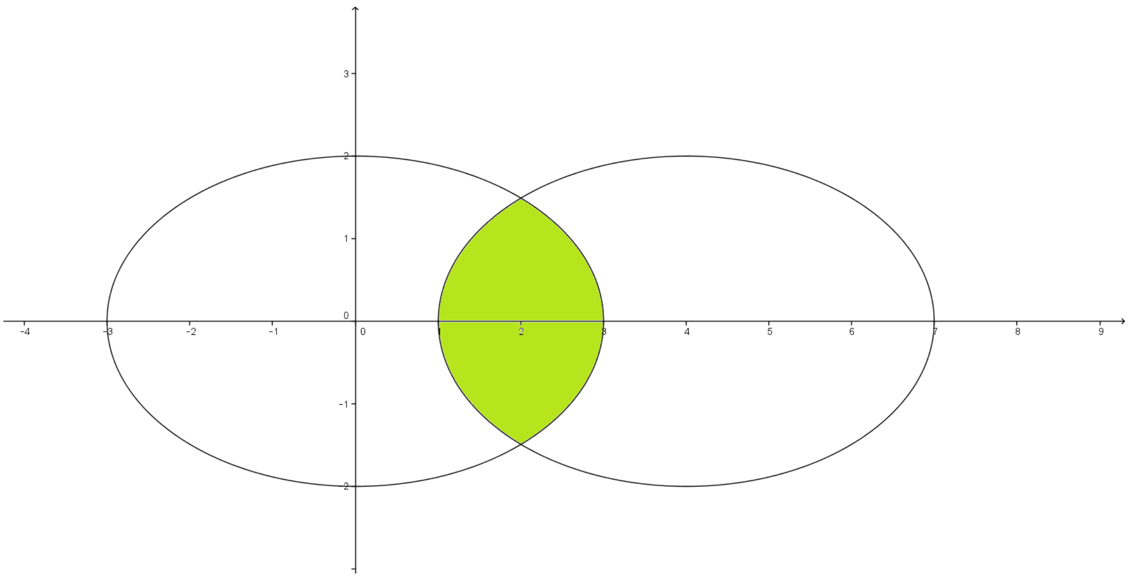
Questão Extra:

(a)

$$A, B, C \quad \text{abertos em} \quad \mathbb{R}^n \Rightarrow A \cap B \cap C \quad \text{é aberto em} \quad \mathbb{R}^n$$

De fato, dado $x \in A \cap B \cap C$, então $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$. Como A, B e C são abertos, existem $r_a, r_b, r_c > 0$ tais que $B(x, r_a) \subset A$, $B(x, r_b) \subset B$ e $B(x, r_c) \subset C$. Tome $r = \min\{r_a, r_b, r_c\}$. Daí, $B(x,r) \subset B(x, r_a) \subset A$, $B(x,r) \subset B(x, r_b) \subset B$ e $B(x,r) \subset B(x, r_c) \subset C$ e portanto $B(x,r) \subset A \cap B \cap C$, logo $A \cap B \cap C$ é aberto.

(b) O conjunto X é dado pelo esboço abaixo:



Daí,

$$frX = A \cup B,$$

onde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\};$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 3 \quad \text{e} \quad \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\};$$