UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 3 - 20/06/2018 - Turma 2

Questão 1: A região T é dada pelo seguinte conjunto

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 - x,\, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Daí temos,

$$\iiint\limits_T x^2\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2\, dzdydx = \frac{1}{60}.$$

Questão 2: Usando a mudança de variáveis dada por

$$u = y - x, \quad v = y + x,$$

obtemos $x = \frac{v-u}{2}$ e $y = \frac{v+u}{2}$ e daí o jacobiano da mudança de variáveis será:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$

A região R será transformada por essa mudança de variáveis em uma região no plano uv limitada pelas retas $u = -v$, $u = v$, $v = 1$ e $v = 2$. Portanto,

$$\iint\limits_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right)\, dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{v}\right)\, dudv = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 1.$$

Questão 3: Observe que a região de integração W é a região limitada por cima pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e por baixo pelo parabolóide de equação $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. Essas duas superfícies se interceptam na região W na altura $z = 2$ por uma circunferência de raio 2. Usando uma mudança de variáveis para as coordenadas cilíndricas, temos:

$$W = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, \frac{r^2}{2} \leq z \leq \sqrt{8 - r^2}\}.$$

Portanto,

$$\iiint\limits_W z\, dxdydz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{8-r^2}} zr\, dzd\theta dr = \frac{28}{3}\pi.$$

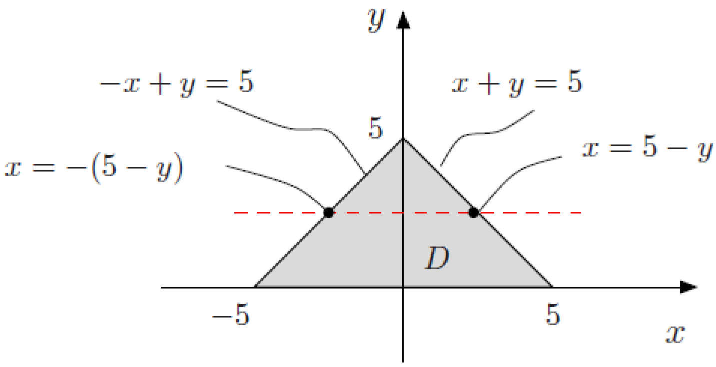
Questão 4: Note que, a região de integração H é o hemisfério superiores da esfera centrada na origem de raio 1. Logo, em coordenadas esféricas temos

$$H = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1,\;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi,\;\; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Portanto,

$$\iiint\limits_H (1-x^2-y^2)\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\rho^2\cdot\text{sen}^2\phi\cdot\cos^2\theta-\rho^2\cdot\text{sen}^2\phi\cdot\text{sen}^2\theta)\rho^2\text{sen}\phi\,d\rho d\theta d\phi = \frac{2}{5}\pi.$$

Questão Extra: Consideremos o eixo x passando pela base e o eixo y coincidindo com a mediatriz relativa à base do triângulo (placa fina). Veja figura abaixo:



Como $\rho(x,y)=1$, então a massa dessa placa fina será

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dA = \iint\limits_D 1\,dA = \int_0^5\int_{y-5}^{5-y} dxdy = 25u.m.$$

E,

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dA}{m} = \frac{\int_0^5\int_{y-5}^{5-y} x\,dxdy}{25} = 0;$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dA}{m} = \frac{\int_0^5\int_{y-5}^{5-y} y\,dxdy}{25} = \frac{5}{3}.$$

Portanto o centro de massa será em $(0,\frac{5}{3})$, isto é, situa-se a $\frac{5}{3}$ da base, sobre sua mediatriz.