UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*
Prof. *Victor Martins*

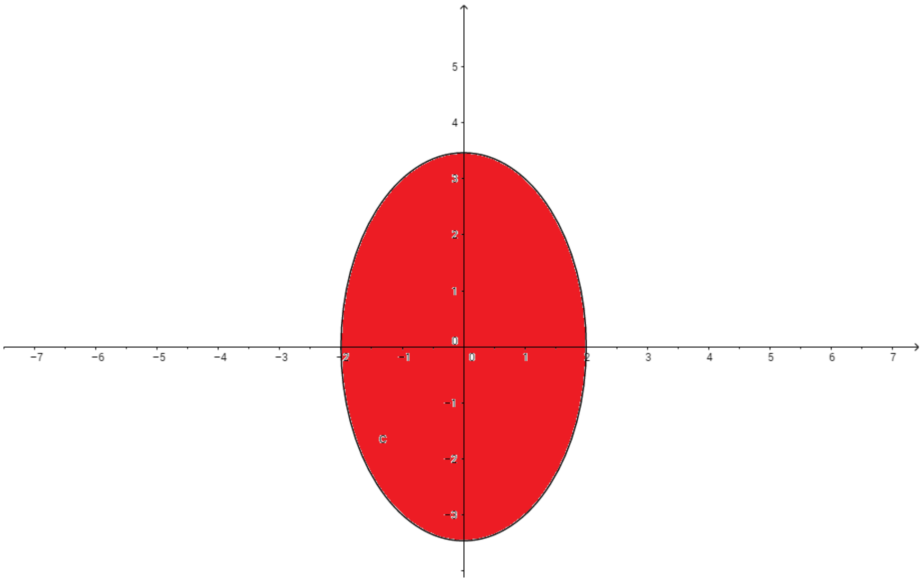
Gabarito Prova 1

Questão 1:

(a) Devemos ter

$$\frac{24-6x^2-2y^2}{3} \geq 0 \Rightarrow 24-6x^2-2y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12} \leq 1.$$

Portanto $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12} \leq 1\}$.



(b) As curvas de nível de f são dadas por

$$\sqrt{\frac{24-6x^2-2y^2}{3}} = k, \quad k \geq 0.$$

Queremos determinar k de modo que $P = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ pertença a curva, isto é,

$$\sqrt{\frac{24-6\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3}} = k \Rightarrow k = \sqrt{2}.$$

Portanto a curva de nível procurada será

$$\sqrt{\frac{24-6x^2-2y^2}{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9} = 1.$$

Questão 2:

(a) A função f será contínua em $(0,0)$ se verificarmos que

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Temos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ao longo do eixo $x\,(y=0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Ao longo da curva $y = x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe e daí a função não é contínua em $(0,0)$.

(b) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0.$$

(c) Pelo item (a), vimos que f não é contínua em $(0,0)$, logo f não é diferenciável em $(0,0)$.

Questão 3:

(a) Teorema de Clairaut: Suponha que f seja definida numa bola aberta D que contenha o ponto (a,b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

(b) Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Se $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0,$$

Portanto

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Analogamente, se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \Rightarrow f_y(x,y) = \frac{xy^4+3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Se $(x,y)=(0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0.$$

Portanto

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4+3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(c)

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

e

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} = 0.$$

Portanto $1 = f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0) = 0$.

Questão 4:

(a) Seja $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ e observe que a superfície dada no enunciado do exercício é dada por $F(x,y,z)=21$. Portanto as equações do plano tangente e da reta normal a essa superfície no ponto $(4,-1,1)$, são dadas, respectivamente, por:

$$\nabla F(4,-1,1)\cdot(x-4,y+1,z-1) = 0 \quad \text{e} \quad n(t) = (4,-1,1)+t\nabla F(4,-1,1).$$

Note que

$$\nabla F(x,y,z) = (2x,4y,6z) \Rightarrow \nabla F(4,-1,1) = (8,-4,6).$$

Portanto a equação do plano tangente procurado é

$$(8,-4,6)\cdot(x-4,y+1,z-1) = 0 \Leftrightarrow 8x-4y+6z = 42 \Leftrightarrow 4x-2y+3z = 21$$

E a reta normal procurada é

$$n(t) = (4,-1,1)+t(8,-4,6).$$

(b) Seja $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz$ Pelo Teorema da Função Implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(2x-3yz)}{(2z-3xy)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(2y-3xz)}{(2z-3xy)}$$

Questão 5:

(a) Dado $X \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, seja θ o ângulo entre os vetores $\nabla f(X)$ e u. Daí a derivada direcional de f em X na direção u é dada por

$$D_u f(X) = \nabla f(X) \cdot u = |\nabla f(X)| \cdot \underbrace{|u|}_{1} \cdot \cos\theta.$$

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, o menor valor que o cosseno atinge é -1 e daí teremos o menor valor da derivada direcional $D_u f(X) = -|\nabla f(X)|$. E isso ocorre quando temos $\theta = \pi$, isto é, quando u tem a mesma direção de $\nabla f(X)$ porém sentido contrário.

(b) A direção e sentido de maior crescimento da temperatura são os mesmos do vetor $\nabla T(2, \frac{1}{2})$, isto é,

$$\nabla T(x, y) = (2x, 6y) \Rightarrow \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) = (4, 3).$$

A direção de menor crescimento é a do vetor gradiente $\nabla T(2, \frac{1}{2})$, porém o sentido é o contrário ao desse vetor.

As taxas de crescimentos nestes casos são:

$$\text{maior}: \quad |\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)| = |(4,3)| = 5;$$

$$\text{menor}: \quad -|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)| = -|(4,3)| = -5.$$

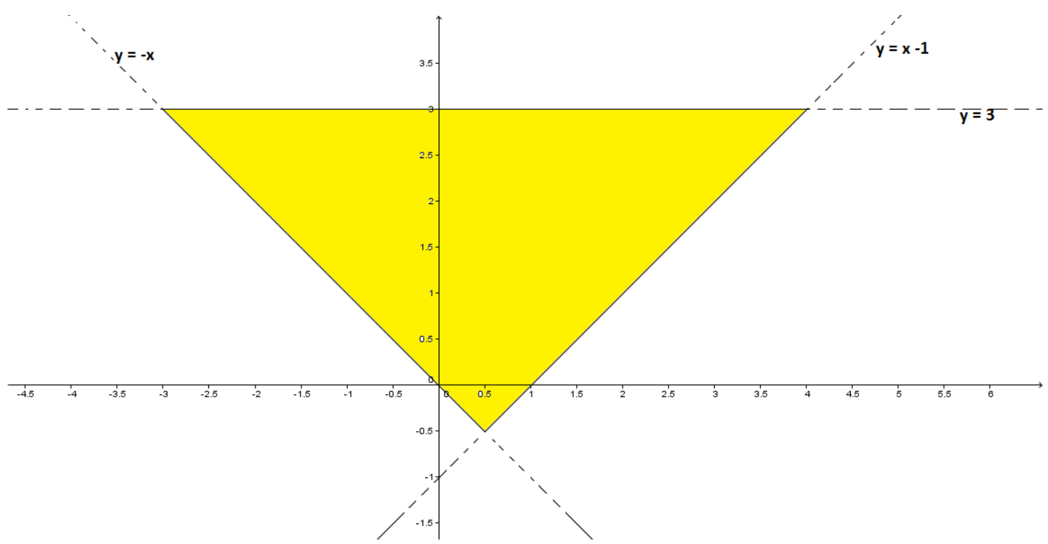
Questão Extra:

(a)

$$A, B \quad \text{abertos em} \quad \mathbb{R}^n \Rightarrow A \cup B \quad \text{é aberto em} \quad \mathbb{R}^n$$

De fato, dado $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. Como A e B são abertos, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$ ou $B(x, r) \subset B$. Daí, $B(x, r) \subset A \cup B$ e portanto $A \cup B$ é aberto.

(b) O conjunto X é dado pelo esboço abaixo:



Daí,

$$frX = A \cup B \cup C,$$

onde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -3 \leq x \leq 4 \quad \text{e} \quad y = 3\};$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\frac{1}{2} \leq y \leq 3 \quad \text{e} \quad y = -x\};$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\frac{1}{2} \leq y \leq 3 \quad \text{e} \quad y = x - 1\};$$