UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra linear* - Prof. *Victor Martins*

Prova final - 14/02/2023

Nome:____ Matrícula:____________

Questão 1: Seja $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ b + d = c \quad \text{e} \quad a = 0 \right\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$.

(a) *(1,0 ponto)* Mostre que W é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) *(0,5 pontos)* Determine uma base para W.

Questão 2:

(a) *(0,5 pontos)* Defina conjunto linearmente independente e conjunto linearmente dependente.

(b) *(1,0 ponto)* Verifique se o conjunto $S = \{(0, -1, 4), (1, 2, 1), (1, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

(c) *(1,0 ponto)* Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

- ( ) Se S é um subconjunto de V com $m > n$ vetores, então S é um conjunto linearmente dependente.
- ( ) Se S é um subconjunto de V com $m < n$ vetores, então S é um conjunto linearmente independente.

Questão 3: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação dada por $T(x, y) = (-x + y, x - y, 2x - 2y)$.

(a) *(1,0 ponto)* Mostre que T é uma transformação linear.

(b) *(1,0 ponto)* Determine o núcleo de T.

Questão 4: Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (3x + y, -2x - 4y + 3z, 5x + 4y - 2z).$$

(a) *(1,0 ponto)* Mostre que T é um isomorfismo.

(b) *(0,5 pontos)* Determine T^{-1}.

Questão 5: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear dado por $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

(a) *(0,5 pontos)* Determine $[T]$.

(b) *(0,5 pontos)* Determine o polinômio característico de T.

(c) *(0,5 pontos)* Determine, caso existam, os autovalores de T.

(d) *(0,5 pontos)* Determine, caso existam, os autovetores de T.

(e) *(0,5 pontos)* T é diagonalizável? Em caso afirmativo, exiba uma base α de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores e $[T]_\alpha^\alpha$.

BOA PROVA!