UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra linear* - Prof. *Victor Martins*

Prova 1 - 25/05/2022

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: *(2,0 pontos)*

(a) Verifique se $\mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas a seguir é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x, y) = (ax, y).$$

(b) Considere $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais positivos e defina a operação de adição, denotada por $\oplus$, e uma multiplicação por escalares reais, denotada por $\otimes$, da seguinte forma:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad k \otimes x = x^k.$$

Sabe-se que com essas operações $\mathbb{R}_+$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Neste caso, quem é o vetor nulo de $\mathbb{R}_+$? Justifique.

Questão 2: *(2,0 pontos)* Resolva e classifique os sistemas lineares abaixo:

(a) $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 7z = -1 \\ -2x + 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 7z = 3 \\ 4x + 10y + 14z = 7 \end{cases}$$

Questão 3: *(1,0 ponto)* Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que o sistema a seguir nunca admite solução:

$$\begin{cases} x + az = 1 - a \\ y + bz = -b \\ x + y + z = 1 - b \\ 2x + y + (a+1)z = 1 - a - b. \end{cases}$$

Questão 4: *(1,0 ponto)* Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determine todas as matrizes B de ordem 2 tais que $AB = BA$.

Questão 5: *(4,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre, se a afirmação for verdadeira, dê um contraexemplo, se for falsa.

(a) ( ) Se A e B são matrizes quadradas simétricas então $AB + BA$ é simétrica.

(b) ( ) A função $f : M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(A) = detA$ é injetora.

(c) ( ) Se A é uma matriz quadrada então $det(-A) = -detA$.

(d) ( ) Se A é inversível e $AB = 0$, então necessariamente B é a matriz nula.

BOA PROVA!