UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra Linear II***
Prof°. ***Victor Martins***

Lista 5: Produto Interno

(1) Seja V um espaço com produto interno e considere a norma $||\cdot||$ proveniente do produto interno.

(a) *(Lei do paralelogramo)* Mostre que $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$, para quaisquer $u, v \in V$.

(b) Mostre que $u - v$ é ortogonal a $u + v$ se, e somente se $||u|| = ||v||$.

(2) (a) Seja W um subespaço de V e V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $W \times W$ é um produto interno em W.

(b) Seja $T \in \mathfrak{L}(U, V)$ injetora. Mostre que se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V então $(\cdot|\cdot)$ definido por $(u|v) = \langle T(u), T(v) \rangle$ é um produto interno em U.

(3) *(Desigualdade de Bessel)* Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto ortonormal de V. Mostre que

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq ||v||^2$$

para todo $v \in V$. A igualdade vale se, e somente se, $v \in [\mathcal{B}]$.

(4) (a) Mostre que $||u + v|| \leq ||u + w|| + ||w - v||$ para quaisquer u, v, w num espaço normado V.

(b) Seja V um espaço euclidiano. Mostre que, se $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$ então $u = 0$.

(c) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são escalares, mostre que, para cada α_i, existe um único vetor $u_i \in V$ tal que $\langle v_i, u_i \rangle = \alpha_i$.

(5) Considere o espaço vetorial das funções reais contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$, com produto interno definido por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{2\pi} p(t)q(t)dt,$$

e norma proveniente dele.

(a) Mostre que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são ortogonais.

(b) Normalize os vetores $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ usando a norma proveniente do produto interno.

(c) Mostre que $\operatorname{sen} x$ é ortogonal a $\cos 2x$ e a $\cos 3x$.

(6) Mostre que se V é um espaço euclidiano sobre $\mathbb{R}$, a aplicação $\phi : V^* \to V$ dada por $\phi(f) = y$, onde $f(x) = \langle x, y \rangle$, para todo $x \in V$, é um isomorfismo entre V^* e V.

(7) Seja $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Determine a projeção ortogonal de h em W, sendo $W = [f_1, f_2]$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$ e $h(x) = x^3 - x$.

(8) Seja $V = P(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com coeficientes reais. Considere o produto interno definido em $C([-1,1], \mathbb{R})$ por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Seja $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, \ldots\}$ base de $P(\mathbb{R})$. Encontre os 4 primeiros termos da base $\{p_1, p_2, \ldots\}$ obtida ao se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\mathfrak{B}$. Os polinômios $p_n(t)$ são os *polinômios de Legendre*, que são úteis no estudo de equações diferenciais.

(9) Sejam U e V espaços com produto interno e $T : U \to V$ uma aplicação. Uma aplicação $T^* : V \to U$ é **adjunta** de T se satisfizer

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad \forall\, x \in U,\, y \in V.$$

Mostre que, se U e V são espaços euclidianos, então existe a adjunta de uma aplicação linear $T : U \to V$.

(10) Seja $V = P(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)dt$ é um produto interno em V.

(b) Sejam $W = P_1(\mathbb{R}) \leq V$ e $f \in W^*$ tal que $f(p) = p(2)$. Encontre $q \in W$ tal que $f(p) = \langle p, q \rangle$.

(c) Se $f \in V^*$ é definido por $f(p) = p(2)$ então existe $q \in V$ tal que $f(p) = \langle p, q \rangle$?

(11) Sejam U e V espaços euclidianos e $M : U \to V$ uma aplicação. M é uma **isometria** se, para quaisquer $x, y \in U$, tivermos

$$||M(x) - M(y)|| = ||x - y||.$$

Se M é uma isometria linear, mostre que:

(a) M é injetora;

(b) M preserva o produto interno.

(12) Sejam W_1, W_2 subespaços do espaço com produto interno V. Mostre que:

(a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

(b) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$;