UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 3: Princípio do menor inteiro e indução

(1) Encontre cotas inferiores, cotas superiores, o elemento mínimo e o elemento máximo, caso existam, para cada um dos conjuntos a seguir.

(a) $A = \{-4, -7, 2, 6, 0, 1, -1\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \geq 11\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Z} : \ x < 5\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \geq -8\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{Z}_+^* : \ 3$ é divisor de $x^2\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{Z}_+^* : \ 5$ é divisor de $x^3\}$

(g) $G = \{x \in \mathbb{Z} : \ x$ é múltiplo positivo de $4\}$

(h) $H = \{x \in \mathbb{Z} : \ x$ é múltiplo negativo de $6\}$

(2) Mostre que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

para todo $n \geq 1$.

(3) Verifique se as seguintes fórmulas são válidas para $n \geq 1$.

(a) $5 + 9 + 13 + \cdots + (4n + 1) = n(2n + 3)$;

(b) $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(4) Uma **progressão aritmética** de razão r e termo inicial a_1 é uma sequência

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

em que a diferença de dois termos consecutivos é sempre igual a r, isto é

$$a_n - a_{n-1} = r, \ \forall \ n \geq 2.$$

Considere uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_1. Mostre que:

(a) $a_n = a_1 + (n-1)r$;

(b) a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

(5) Uma **progressão geométrica** de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1 é uma sequência

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

em que o quociente de dois termos consecutivos é sempre igual a q, isto é

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \ \forall \ n \geq 2.$$

Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1. Mostre que:

(a) $a_n = a_1 q^{n-1}$;

(b) a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão é dada por

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(6) Conjecture uma fórmula para as expressões a seguir e, em seguida, demonstre-a.

(a) $1 + \dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{1}{2}, \qquad 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 2 - \dfrac{1}{4}, \qquad 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 2 - \dfrac{1}{8}$

(b) $1 = 1, \quad 1-4 = -(1+2), \quad 1-4+9 = 1+2+3, \quad 1-4+9-16 = -(1+2+3+4).$

(7) (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 para determinar uma possível fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre a fórmula encontrada no item anterior por indução.

(8) Se $0 \leq k \leq n$, define-se o "coeficiente binomial" $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Mostre que

(a) $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}, \quad k \neq 0, n \quad$ (Relação de Stifel)

(b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é sempre um número natural.

(9) Faça uma conjectura a respeito da soma

$$S_n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Prove sua conjectura.

(10) Seja F_i o i-ésimo termo da sequência de Fibonacci. Mostre que:

(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

(b) $F_1 + F_3 + \cdots + +F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.

(11) (Fuvest 1981) P é uma propriedade relativa aos números naturais. Sabe-se que:

(i) P é verdadeira para o natural $n = 10$.

(ii) Se P é verdadeira para n, então P é verdadeira para $2n$.

(iii) Se P é verdadeira para n, $n \geq 2$, então P é verdadeira para $n - 2$.

Pode-se concluir que:

(a) P é verdadeira para todo natural n.

(b) P é verdadeira somente para os números naturais n, $n \geq 10$.

(c) P é verdadeira para todos os números naturais pares.

(d) P é verdadeira somente para as potências de 2.

(e) P não é verdadeira para os números ímpares.

(12) (Cespe - Abin 2010, Oficial Técnico de Inteligência, adaptado) Considere uma função proposicional $P(n)$ relativa aos números inteiros não negativos que satisfaça as seguintes propriedades:

(i) $P(3)$ é verdadeira;

(ii) se, para um número inteiro não negativo n, $P(n)$ for verdadeira, então $P(n^2)$ também será verdadeira;

(iii) se, para um número inteiro não negativo $n \geq 2$, $P(n)$ for verdadeira, então $P(n-1)$ também será verdadeira.

Julgue os itens que se seguem, acerca de $P(n)$ e suas propriedades.

(a) A função proposicional "a raiz quadrada de n é um número inteiro" não pode ser usada como exemplo para $P(n)$.

(b) $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro não negativo.

(13) Mostre que a função proposicional

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 + 3$$

satisfaz a segunda propriedade do Primeiro Princípio de Indução, mas não satisfaz a primeira propriedade, qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$ escolhido.