UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 8: Estruturas definidas por uma operação

(1) Em cada caso a seguir, verifique se a operação $*$ sobre X é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Determine também o conjuntos dos elementos regulares para a operação dada. Para as operações que possuem elemento neutro, determine os elementos simetrizáveis:

(a) $X = \mathbb{R}$ e $x * y = \dfrac{x+y}{2}$

(b) $X = \mathbb{R}$ e $x * y = x$

(c) $X = \mathbb{R}$ e $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $X = \mathbb{R}^*$ e $x * y = \dfrac{x}{y}$

(2) Em cada caso a seguir está definida uma operação sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Verifique se ela é associativa, comutativa e tem elemento neutro. Determine também o conjuntos dos elementos regulares para a operação dada. Para as operações que possuem elemento neutro, determine os elementos simetrizáveis:

(a) $(a, b) * (c, d) = (ac, 0)$

(b) $(a, b) \bigtriangleup (c, d) = (a + c, b + d)$

(c) $(a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc)$

(d) $(a, b) \oslash (c, d) = (a + c, bd)$

(3) Estabeleça as condições sobre $m, n \in \mathbb{Z}$ de modo que a operação $*$ sobre $\mathbb{Z}$ dada pela lei $x * y = mx + ny$:

(a) seja associativa;

(b) seja comutativa;

(c) admita elemento neutro.

(4) Mostre que nenhum elemento de $\mathbb{R}$ é regular para a operação $*$ assim definida:

$$x * y = x^2 + y^2 - xy.$$

(5) Em cada caso a seguir está definida uma operação $*$ sobre X. Faça a tábua da operação:

(a) $X = \{1, 2, 3, 6\}$ e $x * y = \text{mdc}(x, y)$

(b) $X = \{1, 3, 9, 27\}$ e $x * y = \text{mmc}(x, y)$

(c) $X = \{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\}$ e $x * y = \min(x, y)$

(d) $X = \{3\sqrt{2}, \pi, \frac{7}{2}\}$ e $x * y = \max(x, y)$

(6) Em cada caso a seguir está definida uma operação $*$ sobre $X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Construa a tábua da operação.

(a) $x * y = x \cup y$

(b) $x * y = x \cap y$

(c) $x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$

(7) Construa as tábuas das operações $*$ e $\triangle$ sobre $X = \{0, 1, 2, 3\}$ assim definidas:

(a) $x * y =$ resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x + y$ por 4.

(b) $x \triangle y =$ resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x \cdot y$ por 4.

(8) Construa as tábuas das operações $\oplus$ e $\odot$ sobre $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ assim definidas:

(a) $x \oplus y =$ resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x + y$ por 5.

(b) $x \odot y =$ resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x \cdot y$ por 5.

(9) A partir da tábua abaixo, da operação $\odot$ sobre $X = \{1, 2, 3, 4\}$, calcule os seguintes elementos:

$\odot$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	4	2
4	1	4	2	3

(a) $(3 \odot 4) \odot 2$

(b) $3 \odot (4 \odot 2)$

(c) $(4 \odot (3 \odot 3)) \odot 4$

(d) $(4 \odot 3) \odot (3 \odot 4)$

(e) $((4 \odot 3) \odot 3) \odot 4$

(10) Construa a tábua da operação de intersecção sobre a família de conjuntos $\mathcal{F} = \{A, B, C, D\}$, sabendo que

$$A \cap B = B,\ B \cap C = C,\ C \cap D = D.$$

Em seguida, estabeleça:

(a) qual é o elemento neutro;

(b) que elementos são simetrizáveis;

(c) que elementos são regulares.

(11) Nos itens a seguir verifique qual a maior estrutura (semigrupo, monóide ou grupo) que os conjuntos com as operações indicadas possuem:

(a) O conjunto $\wp(X)$ das partes de um conjunto X, com a operação de união de conjuntos.

(b) O conjunto $\wp(X)$ das partes de um conjunto X, com a operação de intersecção de conjuntos.

(c) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, com a operação de subtração.

(d) O conjunto $\mathbb{N}^*$ dos números naturais não nulos, com a operação de potenciação.

(e) O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, com a operação de divisão.

(12) Verifique se os conjuntos abaixo com as operações dadas são grupos:

(a) o conjunto dos números ímpares com a multiplicação.

(b) o conjunto dos múltiplos de 3 com a adição.

(c) conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com a adição.

(d) conjunto dos polinômios da forma $ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ com a adição.

(e) conjunto dos inteiros não positivos $\mathbb{Z}_-$, com a adição.

(f) conjunto $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, com a adição.

(g) conjunto $A = \{1, -1\}$, com a multiplicação.

(13) Sabemos que em $\mathbb{Z}$, $m \equiv n (\operatorname{mod} 5)$ se e somente se, $m - n = 5k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Desta relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, vem o conjunto quociente $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Faça a tábua da adição em $\mathbb{Z}_5$. Logo em seguida, determine a estrutura (semigrupo, monóide ou grupo) de $\mathbb{Z}_5$.

(14) Defina em $\mathbb{Z}$ a operação $\odot$ da seguinte forma:

$$a \odot b = a + b - ab.$$

Qual a estrutura (semigrupo, monóide ou grupo) de $\mathbb{Z}$ com a operação $\odot$?

(15) Defina em $\mathbb{Z}$ a operação $\oplus$ da seguinte forma:

$$a \oplus b = a + b^2.$$

Qual a estrutura (semigrupo, monóide ou grupo) de $\mathbb{Z}$ com a operação $\oplus$?

(16) Mostre que $\mathbb{R}$ dotado da operação $*$ tal que $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ é um grupo abeliano.

(17) Mostre que $\mathbb{R}$ munido da operação $\triangle$ tal que $x \triangle y = x + y - 3$ é um grupo abeliano.

(18) Mostre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um grupo aditivo abeliano. Estabeleça as condições sobre a e b para que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ seja também um grupo multiplicativo.