Introdução à teoria dos grafos

Michely Santos e Victor Martins

I Semana Acadêmica de Matemática UFVJM

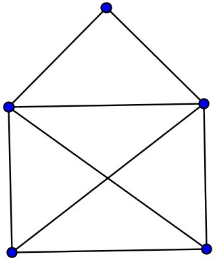
5 de outubro de 2016

Aula 1

Teoria Básica

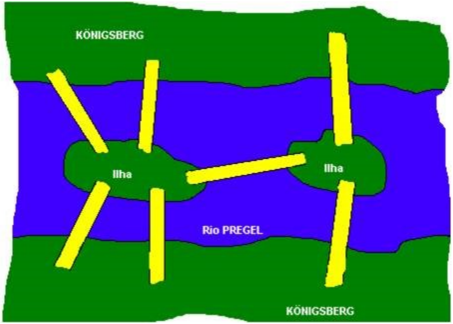
Desafio do envelope

Tente desenhar o envelope abaixo sem retirar o lápis do papel e nem passar mais de uma vez pela mesma linha.



Introdução

1. Origem (séc. XVIII) - As pontes de Königsberg;



2. Teoria dos grafos no sistema educacional;

3. Áreas onde aparece;

4. A abstração matemática.

2. Teoria dos grafos no sistema educacional;
3. Áreas onde aparece;
4. A abstração matemática.

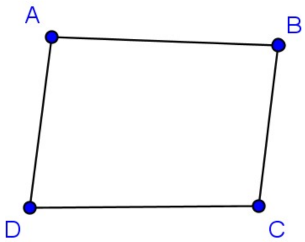
2. Teoria dos grafos no sistema educacional;

3. Áreas onde aparece;

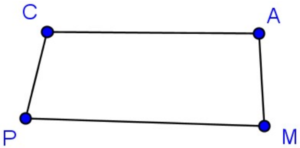
4. A abstração matemática.

Definições

Em um campeonato de futebol da Escola Antônio Freitas, foram formados quatro times, digamos A, B, C e D. Foram realizados os seguintes jogos: A jogou com B e D; B jogou com A e C; C jogou com B e D; e D jogou com A e C. Colocando esses jogos em um diagrama, podemos obter a seguinte configuração:



Em uma turma de sexto ano da escola do exemplo anterior, estudam Clarisse (C), Amanda (A), Patrícia (P) e Mariane (M). Clarisse é amiga de Amanda e Patrícia somente; Amanda só é amiga de Clarisse e Mariane; Patrícia por sua vez tem como amigas Clarisse e Mariane e, finalmente, Patrícia e Amanda são amigas de Mariane. No diagrama temos:



Diagramas $\leftrightarrow$ Grafos

Pontos $\leftrightarrow$ Vértices

Linhas $\leftrightarrow$ Arestas

Um **grafo** é uma figura constituída de um número finito de arestas, cujas extremidades são os vértices. ($G(V, A)$).

Diagramas $\leftrightarrow$ Grafos

Pontos $\leftrightarrow$ Vértices

Linhas $\leftrightarrow$ Arestas

Um **grafo** é uma figura constituída de um número finito de arestas, cujas extremidades são os vértices. $(G(V, A))$.

Diagramas $\leftrightarrow$ Grafos

Pontos $\leftrightarrow$ Vértices

Linhas $\leftrightarrow$ Arestas

Um **grafo** é uma figura constituída de um número finito de arestas, cujas extremidades são os vértices. ($G(V, A)$).

Diagramas $\leftrightarrow$ Grafos

Pontos $\leftrightarrow$ Vértices

Linhas $\leftrightarrow$ Arestas

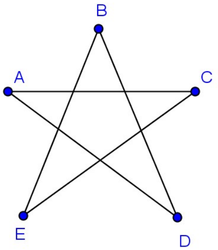
Um **grafo** é uma figura constituída de um número finito de arestas, cujas extremidades são os vértices. ($G(V, A)$).

Definição

Dado um vértice A de um grafo, denominamos **grau do vértice** *A o número de arestas do grafo com alguma extremidade em A.*

Definição

Um **caminho** *em um grafo é uma sequência de arestas do grafo, de modo que duas arestas consecutivas tenham pelo menos um vértice em comum; além disso, nessa sequência não aparecem arestas repetidas. Uma aresta em um grafo é dita* **orientada** *quando esta faz parte de um caminho neste grafo.*

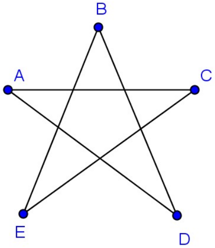


Definição

Dado um vértice A de um grafo, denominamos **grau do vértice** *A o número de arestas do grafo com alguma extremidade em A.*

Definição

Um **caminho** *em um grafo é uma sequência de arestas do grafo, de modo que duas arestas consecutivas tenham pelo menos um vértice em comum; além disso, nessa sequência não aparecem arestas repetidas. Uma aresta em um grafo é dita* **orientada** *quando esta faz parte de um caminho neste grafo.*



Definição

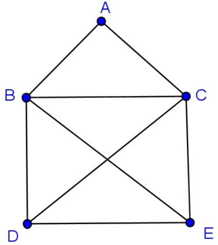
Um caminho é dito **fechado** *quando o vértice inicial e o final coincidem. Noutras palavras, quando este caminho inicia-se num vértice dado e termina nele mesmo.*

Definição

Um grafo é dito **conexo** *se para quaisquer vértices A e B do grafo existe um caminho iniciando em A e terminando em B.*

Definição

Um grafo admite um **passeio de Euler** *se existir um caminho contendo todas as suas arestas.*



Definição

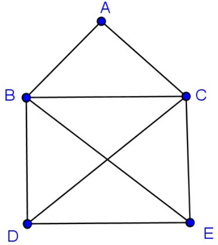
Um caminho é dito **fechado** *quando o vértice inicial e o final coincidem. Noutras palavras, quando este caminho inicia-se num vértice dado e termina nele mesmo.*

Definição

Um grafo é dito **conexo** *se para quaisquer vértices A e B do grafo existe um caminho iniciando em A e terminando em B.*

Definição

Um grafo admite um **passeio de Euler** *se existir um caminho contendo todas as suas arestas.*



Definição

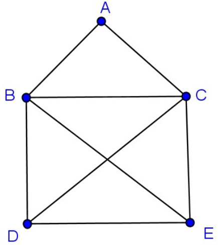
Um caminho é dito **fechado** *quando o vértice inicial e o final coincidem. Noutras palavras, quando este caminho inicia-se num vértice dado e termina nele mesmo.*

Definição

Um grafo é dito **conexo** *se para quaisquer vértices A e B do grafo existe um caminho iniciando em A e terminando em B.*

Definição

Um grafo admite um **passeio de Euler** *se existir um caminho contendo todas as suas arestas.*

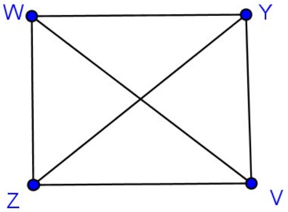


Definição

Um grafo é dito **completo** *se existe uma aresta entre cada par de vértices. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n.*

Definição

Um grafo que pode ser desenhado em um plano sem que ocorra cruzamento entre arestas é chamado **grafo planar**.

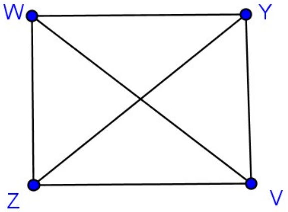


Definição

Um grafo é dito **completo** *se existe uma aresta entre cada par de vértices. O grafo completo com n vértices é denotado por* K_n.

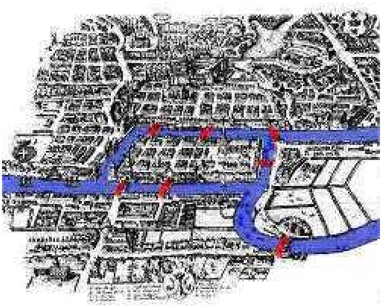
Definição

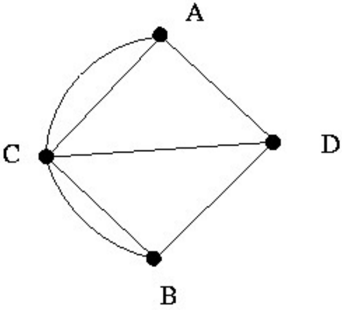
Um grafo que pode ser desenhado em um plano sem que ocorra cruzamento entre arestas é chamado **grafo planar**.



Modelagem matemática

O problema dos habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) localizada na Rússia, consistia em atravessar as sete pontes do Rio Prega, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida.





Resultados

Teorema

Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem grau par.

Teorema

Se um grafo conexo tem seus vértices todos com graus pares, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice.

Resultados

Teorema

Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem grau par.

Teorema

Se um grafo conexo tem seus vértices todos com graus pares, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice.

Teorema

Se um grafo planar admite um passeio de Euler começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio têm graus ímpares e todos os demais vértices do grafo tem grau par.

Teorema

Se um grafo conexo tem dois vértices de graus ímpares e os demais pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro.

Teorema

Se um grafo planar admite um passeio de Euler começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio têm graus ímpares e todos os demais vértices do grafo tem grau par.

Teorema

Se um grafo conexo tem dois vértices de graus ímpares e os demais pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro.

E agora, com a inserção dos elementos matemáticos, o que podemos dizer sobre o problema das pontes de Königsberg?

Referências Bibliográficas

João Carlos Vieira Sampaio, (2008)
Uma introdução à Topologia Geométrica.
EdUFSCar; São Carlos, SP.

Samuel Jurkiewicz, (2005)
Grafos: Uma Introdução.
Estágio dos Alunos Bolsistas, OBMEP 2005.