UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof^{o}. *Victor Martins***

Lista 6: Subespaços vetoriais

(1) Considere os espaços vetoriais V dados abaixo munidos das operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar. Para cada caso abaixo, verifique se W é subespaço vetorial de V.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, x^3) : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(3y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, 2x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

(f) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3z - x\}$

(g) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(3a - b, 2a + b, a - 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

(h) $V = \mathbb{R}^3$, W é o conjuto dos vetores do $\mathbb{R}^3$ com pelo menos uma coordenada maior ou igual a 0

(i) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - w = 0 \quad \text{e} \quad z = 0\}$

(j) $V = \mathbb{C}^4$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{C}^4$ que têm duas coordenadas iguais

(k) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, x, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

(l) $V = \mathbb{R}^5$, W é o conjunto dos vetores do $\mathbb{R}^5$ com duas ou mais coordenadas nulas

(m) $V = \mathbb{C}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x \cdot y = 0\}$

(n) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x, , 2x, 3x, \ldots, nx) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}\}$

(o) $V = M_2(\mathbb{C})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$

(p) $V = M_3(\mathbb{R})$, W é o conjunto das matrizes triangulares superiores

(q) $V = M_{2\times3}(\mathbb{C})$, W é o conjunto das matrizes 2×3 sobre $\mathbb{C}$ que têm alguma coluna formada por elementos iguais

(r) $V = M_2(\mathbb{C})$, $W = \{A \in V : A^t = -A\}$ (matrizes antissimétricas)

(s) $V = M_4(\mathbb{R})$, $W = \{A \in V : detA = 0\}$

(t) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

(2) Considere $\mathbb{C}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{C}\}$ que, com as operações usuais de adição e de multiplicação por escalar é espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Temos que $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2$. $\mathbb{R}^2$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$? Justifique.

(3) Sejam $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \quad \text{e} \quad z-t=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z+t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(4) Sejam $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y-t=0 \quad \text{e} \quad z=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \quad \text{e} \quad z-t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(5) Dados $u=(1,2)$, e $v=(-1,2)$, sejam W_1 e W_2 respectivamente as retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^2$ e contêm u e v. Mostre que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

(6) Sejam $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$, $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Obtenha $W_1 + W_2$ e verifique se esta soma é direta.

(7) Verifique se é verdadeiro ou falso:

(a) $(1,-1,2) \in \langle (1,2,3),(3,2,1) \rangle$

(b) $\langle (-5,3,2),(3,-1,3) \rangle = \mathbb{R}^3$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

(8) Descreva o subespaço $W \subset M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O vetor $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W?

(9) Sejam U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,0,0)$ e W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

(10) Mostre que os polinômios $1-x^3, (1-x)^2, 1-x$ e 1 geram o espaço $P_3(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a 3.

(11) Para cada subespaço obtido no exercício 1, obtenha um conjunto de vetores que gera o subespaço.

(12) Sejam U_1, U_2, W_1, W_2 subespaços de um espaço vetorial V de modo que $V = U_1 \oplus W_1$ e $V = U_2 \oplus W_2$. Se $U_1 \subset U_2$ e $W_1 \subset W_2$, prove que $U_1 = U_2$ e $W_1 = W_2$.

(13) Considere o conjunto $S = \{(-1,3,1),(1,-2,4)\}$ e determine:

(a) o espaço gerado por S;

(b) o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $v = (5,k,11)$ pertença ao espaço gerado por S.

(14) Encontre um conjunto de geradores para cada espaço abaixo:

(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + 3z = 0\}$

(b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y = 0 \quad \text{e} \quad x + t = 0\}$

(c) $V = \left\{p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : \ a - \dfrac{b}{2} = c\right\}$

(d) $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ a + c = d \quad \text{e} \quad b = 0\right\}$

(15) Quais dos seguintes vetores

(a) $(0, 2, 2, 2)$, (b) $(1, 4, 5, 2)$, (c) $(0, 0, 0, 0)$, (d) $(0, 3, 1, 5)$

são combinações lineares de $u = (0, 0, 2, -2)$ e $v = (0, 1, 3, -1)$?

(16) Expresse os seguintes polinômios

(a) $2 + 5x$, (b) $-x + 2x^2$, (c) $3 + 3x + 5x^2$

como combinação linear de

$$p_1(x) = 2 + x + 4x^2, \qquad p_2(x) = 1 - x + 3x^2, \qquad p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2.$$