Prova 2 - 17/11/22 - Álgebra linear

Questão 1:

a) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(3y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

Note que $W \subset V$ por definição. Além disso, $W \neq \emptyset$, já que $(0,0) = (3.0, 0) \in W$.

Sejam $u = (3y, y)$, $v = (3x, x) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $u + v = (3y + 3x, y + x) = (3(y+x), y+x) \in W$

(ii) $\alpha u = (\alpha \cdot 3y, \alpha \cdot y) = (3(\alpha y), \alpha y) \in W$.

Portanto, W é subespaço de V

— // —

b) $V = M_2(\mathbb{R})$; $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$

Note que,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, já que

$\det A = 0$ e $\det B = 0$.

Mas $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\det(A+B) = 1$,

logo $A+B \notin W$ e portanto, W não é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

Questão 2:

a). $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

$= \{(2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2y, y, 0) + (-3z, 0, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(2,1,0) + z(-3,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (2,1,0), (-3,0,1) \rangle$

Como os vetores encontrados não são múltiplo escalar um do outro, segue que $B = \{(2,1,0), (-3,0,1)\}$ é base de W_1 e

$\dim W_1 = 2.$

$$\bullet\ W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3z - x\}$$
$$= \{(x, 3z-x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x,-x,0) + (0,3z,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,-1,0), (0,3,1) \rangle$$

Note que, $S = \{(1,-1,0),(0,3,1)\}$ é base de W_2 e portanto $\dim W_2 = 2$

——— // ———

b) Observe que:

$$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \text{ e } y = 3z - x\}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y = 3z - x \end{cases} \Rightarrow x - 6z + 2x + 3z = 0$$
$$3x = 3z \Rightarrow \boxed{x = z}$$
$$\Rightarrow \boxed{y = 2z}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{(z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,2,1) \rangle$$

Como $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ segue que $W_1 + W_2$ não é soma direta. E

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= 2 + 2 - 1$$
$$= 3$$

---//---

e) Como $\dim(W_1+W_2) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e W_1+W_2 é subespaço de $\mathbb{R}^3$, segue que $W_1+W_2 = \mathbb{R}^3$.

---//---

Questão 3:

a) Como $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4$ e B possui 4 elementos, é suficiente mostrarmos que B é um conjunto LI. Para isso, sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a(1-x^3) + b(1-x)^2 + c(1-x) + d \cdot 1 = 0$$
$$a - ax^3 + b - 2bx + bx^2 + c - cx + d = 0$$
$$-ax^3 + bx^2 + (-2b-c)x + a+b+c+d = 0$$

$$\begin{cases} -a = 0 & \Rightarrow a = 0 \\ b = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ -2b - c = 0 & \Rightarrow c = 0 \\ a+b+c+d = 0 & \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Portanto, $\mathcal{B}$ é LI e consequentemente, uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

—— // ——

b) Utilizando o sistema encontrado no item anterior, devemos ter:

$$\begin{cases} -a = 1 & \Rightarrow \boxed{a = -1} \\ b = 3 & \Rightarrow \boxed{b = 3} \\ -2b - c = 0 & \Rightarrow \boxed{c = -6} \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

$$-1 + 3 - 6 + d = 6 \Rightarrow \boxed{d = 10}$$

Portanto,

$$p(x) = -1(1-x^3) + 3(1-x)^2 - 6(1-x) + 10 \cdot 1$$

—— // ——

Questão 4:

a) (F) Note que o conjunto S possui 5 elementos e a $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4$, logo o conjunto S é L.D.

—— // ——

b) (V) $U = \langle (1,0,0) \rangle$

$W = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$

Note que, $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. Vejamos se $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$ é um conjunto L.I.

$a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a + b = 0 & \Rightarrow a = 0 \\ b + c = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Portanto B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Logo, $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

—— // ——

e) (F) Vejamos se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$(1,-1,2) = a(1,2,3) + b(3,2,1)$

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \xRightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} a + 3b = 1 \\ -4b = -3 \\ -8b = -1 \end{cases}$$

Logo teríamos, $b = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{8}$, um absurdo. Logo o sistema é impossível.

—— // ——

d) (V) Vejamos se $B = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ é um conjunto LI.

$a(\sqrt{3}, 1) + b(\sqrt{3}, -1) = (0, 0)$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + \sqrt{3}b = 0 & \times 1/\sqrt{3} \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$b = 0$$

Portanto, B é base de $\mathbb{R}^2$.

—— // ——

e) (V) Observe que o conjunto das matrizes simétricas de ordem 2 é dado por

$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$

Por definição, $W \subset M_2(\mathbb{R})$.

$W \neq \emptyset$, já que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$.

Sejam $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, isto é, $A = A^t$ e $B = B^t$.

$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B \Rightarrow A+B \in W.$

$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in W.$

Portanto, W é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

———— // ————

f) (V)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 2a + 2b - 2c = -4 \\ 3a + 3b - 3c = -6 \\ 4a - 4b + 4c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b - c = -2 \\ a + b - c = -2 \\ a - b + c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + b - c = -2 \end{cases} \xRightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1} \begin{cases} a - b + c = 4 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow -b + c = 3 \Rightarrow \boxed{c = 3 + b}$$

$$S = \{(1, b, 3+b) : b \in \mathbb{R}\}$$

Basta, escolhermos, por exemplo, $b=1$ e daí teremos

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

—— // ——