UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra Linear II*
Prof. *Victor Martins*

Exame Final - 16/07/2019

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente as justificativas para cada solução.)

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sejam V_1 e V_2 os subconjuntos de V formados, respectivamente, pelas funções pares e funções ímpares. Mostre que:

(a) *(1,0 ponto)* V_1 e V_2 são subespaços vetoriais.

(b) *(1,0 ponto)* $V = V_1 \oplus V_2$.

Questão 2:

(a) *(0,5 pontos)* Enuncie o Teorema do Núcleo e da Imagem;

(b) *(1,0 ponto)* Sejam V e U $\mathbb{K}$-espaços vetoriais finitamente gerados tais que $\dim V = \dim U$ e $T \in \mathfrak{L}(V,U)$. Mostre que são equivalentes:

(i) T é injetora;

(ii) T é sobrejetora;

(iii) T é isomorfismo.

Questão 3:

(a) *(1,0 ponto)* Considere no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^3$ a base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,1,1),(2,2,0)\}$. Determine $\mathcal{B}^*$.

(b) *(1,0 ponto)* Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = P(\mathbb{R})$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, defina $f_\alpha \in V^*$ por $f_\alpha(p(t)) = p(\alpha)$. Mostre que $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ é um conjunto linearmente independente em V^*.

Questão 4: Seja $T \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^4)$ definida por

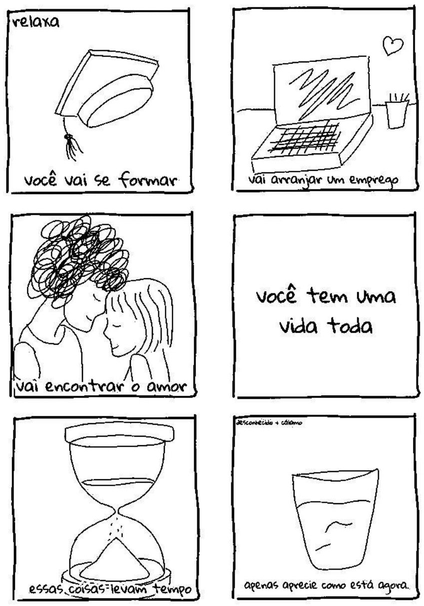
$$T(x,y,z,w) = (3x, 3y, 2x - 7y + z + w, -5x + 2y - z + 3w).$$

Determine:

(a) *(1,0 ponto)* Os polinômios característico e minimal de T;

(b) *(1,0 ponto)* Quais formas de Jordan são possíveis para T.

Questão 5:



(a) *(0,8 pontos)* Mostre que em um espaço vetorial V com produto interno, todo conjunto ortogonal formado por vetores não nulos é linearmente independente;

(b) *(0,8 pontos)* Enuncie e prove o Teorema de Representação de Riez.

(c) *(0,9 pontos)* Seja $T \in \mathfrak{L}(U, V)$ injetora. Mostre que se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V então $(\cdot|\cdot)$ definido por $(u|v) = \langle T(u), T(v) \rangle$ é um produto interno em U.

BOA PROVA!