



Prova 1 - 16/05/2023

Nome: _____ Matrícula: _____

Resolva 5 das questões listadas abaixo. Cada questão tem o valor de 2,0 pontos.

Questão 1: Se um macaco sobe uma escada de 2 em 2 degraus, sobra 1 degrau. Se ele sobe de 3 em 3 degraus, sobram 2. Quantos degraus a escada possui, sabendo que o número de degraus é múltiplo de 7 e que está compreendido entre 40 e 100?

Questão 2:

- (a) Mostre que \bar{a} é inversível em \mathbb{Z}_m se, e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$;
- (b) Verifique se $\overline{3640}$ é inversível em \mathbb{Z}_{7297} .

Questão 3: Uma **progressão aritmética** de razão r e termo inicial a_1 é uma sequência $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ em que a diferença de dois termos consecutivos é sempre igual a r , isto é

$$a_n - a_{n-1} = r, \quad \forall n \geq 2.$$

Consequentemente, temos que o n -ésimo termo da progressão é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Mostre que não é possível formar uma progressão aritmética somente com números primos.

Questão 4: Sejam a, b e c inteiros. Mostre que $\text{mdc}(a, bc) = 1$ se, e somente se, $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, c) = 1$.

Questão 5: Mostre que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

Questão 6: (Fuvest 1984) Sejam $m = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, $n = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$ e $p = 2^5 \cdot 5^4$.

- (a) Quantos divisores de m são múltiplos de 100? Justifique.
- (b) Escreva as condições sobre r, s e t para que n seja divisor comum de m e p .

Questão 7: Mostre que se a soma de dois números naturais não nulos é um número primo, então esses números são primos entre si.

Questão 8: Mostre que $7 | (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Questão 9:

- (a) Mostre que, se a não é divisível por 3, então a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.
- (b) Prove que, se a e b são inteiros tais que 3 divide $a^2 + b^2$, então a e b são divisíveis por 3.

BOA PROVA!