UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*
Prof. *Victor Martins*

Gabarito Prova 2

Questão 1: Usando a mudança de variáveis dada por

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

obtemos $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{v-u}{2}$ e daí o jacobiano da mudança de variáveis será:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

A região R será transformada por essa mudança de variáveis em uma região no plano uv limitada pelas retas $u = -v$, $u = v$, $v = 1$ e $v = 2$. Portanto,

$$\iint\limits_R \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}\, dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{1}{2} \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}(v)}\, dudv = 1.$$

Questão 2: Note que a região D pode ser descrita como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Daí

$$\iint\limits_D \sqrt{x}\cos(y\sqrt{x})\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\cos(y\sqrt{x})\, dydx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 3: A área procurada é a área em destaque na figura a seguir:

Utlizando a mudança para coordenadas polares, isto é, fazendo

$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

temos que as equações dos círculos dados serão

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9 \Rightarrow r = 6\operatorname{sen}\theta.$$

Dessa forma, a região D pode ser descrita por:

$$D = \{(r,\theta) : 3 \leq r \leq 6\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

onde θ_1 e θ_2 são dados pela intersecção dos dois círculos, logo teremos $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Assim a área de D é dada por

$$A(D) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_3^{6\operatorname{sen}\theta} r\, drd\theta = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Questão 4: Note que, a região de integração D é dada por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2,\, y \leq x \leq 2\}.$$

Invertendo-se a ordem de integração, D é dado por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq x\}.$$

Daí temos

$$\int_0^2 \int_y^2 y\mathrm{sen}(x^3)\, dxdy = \int_0^2 \int_0^x y\mathrm{sen}(x^3)\, dydx = \frac{1}{6}(1 - \cos 8).$$

Questão 5: O volume da região dada pode ser calculado por

$$V = \iiint_B 1\, dV,$$

onde $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2+y^2) \leq z \leq 9 - x^2 - y^2, (x,y) \in D\}$, em que D é dado pela projeção no plano xy da intersecção dos parabolóides dados, isto é,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}.$$

Utilizando a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas temos

$$B = \{(r,\theta,z) : 2r^2 \leq z \leq 9 - r^2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r\sqrt{3}\}.$$

Daí,

$$V = \iiint_B 1\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{2r^2}^{9-r^2} r\, dzdrd\theta = \frac{27}{2}\pi.$$

Questão 6: Seja W o elipsóide dado. Sem perda de generalidade, vamos supor $a, b, c > 0$. Utilizando a mudança de variáveis

$$x = a\rho\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = b\rho\mathrm{sen}\,\phi\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = c\rho\cos\phi,$$

temos que

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = -abc\rho^2\mathrm{sen}\,\phi.$$

Daí,

$$V = \iiint_W 1\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 abc\rho^2\mathrm{sen}\,\phi\, d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Questão 7: A região T é dada pelo seguinte conjunto

$$T = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 - x,\, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Daí temos,

$$\iiint_T x^2\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x^2\, dzdydx = \frac{1}{60}.$$