# P 1- Álgebra linear -13/10/2022

## Questão 1:

a) $\begin{cases} -x - y - 2z = 2 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 5y = 4 \\ 4y = 8 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$4y = 8 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \begin{cases} -x + 10 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 6} \\ 6 + z = 1 \quad \boxed{z = -5} \end{cases}$$

$S = (6, 2, -5)$ Sist. possível determinado.

//

b)
$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 4x + 5y = 4 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - 4L_1 \\ \Longrightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & 4 \\ 0 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 17y = 4 \Rightarrow y = 4/17 \\ 13y = 1 \qquad y = 1/13 \end{cases}, \text{ mas } \frac{4}{17} \neq \frac{1}{13}.$$

Logo, o sistema é impossível.

// 

## Questão 2:

$$\begin{cases} Kx + z = K \\ Kx + 2y + Kz = 2K \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 1 & K \\ K & 2 & K & 2K \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_3} \begin{pmatrix} K & 0 & 1 & K \\ K & 0 & K-2 & 2K-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Kx + z = K \\ Kx + (K-2)z = 2K-2 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \boxed{z = K - Kx}$$

$$y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - K + Kx}$$

Da segunda equação, temos:

$$Kx + (K-2)(K-Kx) = 2K-2 \iff$$

$$Kx + K^2 - K^2x - 2K + 2Kx - 2K + 2 = 0 \iff$$

$$K^2 - K^2x + 3Kx - 4K + 2 = 0 \iff$$

$$(3K - K^2)x = -K^2 + 4K - 2 \qquad (*)$$

Estudando as possibilidades, temos que se $(3K-K^2) \neq 0$, então $x = \dfrac{-K^2+4K+2}{3K-K^2}$ e o sistema será possível determinado.

Vejamos quais as considerações sobre $K$ teremos.

$3K - K^2 = 0 \Leftrightarrow K(3-K) = 0 \Leftrightarrow K = 0$ ou

$K = 3$

Portanto, se $K \neq 0$ e $K \neq 3$, temos que o sistema será possível e determinado.

- $K = 0$, daí da equação $(*)$ teríamos

$$0x = -2 \Rightarrow 0 = -2,$$

um absurdo. Logo, o sistema será impossível.

- $K = 3$, da equação $(*)$ teremos:

$$(3.3 - 3^2)x = -3^2 + 4.3 - 2 \Rightarrow$$

$$0.x = 1 \Rightarrow 0 = 1,$$

um absurdo. Logo, o sistema será impossível.

Em resumo, temos:

$K = 0$ ou $K = 3 \Rightarrow$ sistema impossível.

$K \neq 0$ e $K \neq 3 \Rightarrow$ sistema possível e determinado.

Questão 3:

$$E = (A^t)(A^{-1})(C^2)(B^t)(2C),$$

Note que, usando as propriedades de determinantes, temos:

$$\det(E) = \det\left(A^t \cdot A^{-1} \cdot C^2 \cdot B^t \cdot 2C\right)$$
$$= \det A^t \cdot \det(A^{-1}) \cdot \det C \cdot \det C \cdot \det B^t \cdot 2^3 \det C$$
$$= \det A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot 2^3 \cdot (\det C)^3 \cdot \det B$$
$$= 2^3 \cdot (\det C)^3 \cdot \det B.$$

Portanto, precisamos apenas calcular $\det B$ e $\det C$.

$\det B = 1 + 6 - 1 = 6$

$\det C = -4$

Daí

$$\det(E) = 2^3 \cdot (-4)^3 \cdot 6 = 8 \cdot (-64) \cdot 6 = -3072.$$

## Questão 4:

$\mathbb{R}^3$ com as operações dadas não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Note que, a comutatividade não é satisfeita, pois, se tomarmos, por exemplo $(0,1,0), (0,2,0) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(0,1,0)+(0,2,0) = (0,1-2,0) = (0,-1,0)$$

que é diferente de

$$(0,2,0)+(0,1,0) = (0,2-1,0) = (0,1,0).$$

—— // ——

## Questão 5:

a) F.

Contraexemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = 0$$

$$\det A + \det B = 1 + 1 = 2$$

—— // ——

b) V.

em números reais a multiplicação é comutativa

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$
$$= \det B \cdot \det A$$
$$= \det(B.A)$$

——— // ———

c) V

De fato, se A é inversível temos que existe $A^{-1}$ e

$$A \cdot A^{-1} = I \quad (*)$$

Queremos mostrar que $A^{-1}$ é simétrica, ou seja, $(A^{-1}) = (A^{-1})^t$.

Vamos aplicar a transposta em (*)

$$(A \cdot A^{-1})^t = I^t \Rightarrow$$
$$(A^{-1})^t \cdot A^t = I \xRightarrow{A \text{ é simétrica}}$$
$$(A^{-1})^t \cdot A = I \Rightarrow$$

$(A^{-1})^t$ é a inversa de A, ou seja,

$$A^{-1} = (A^{-1})^t,$$

como queríamos mostrar.

——— // ———

d) F.

Tome, por exemplo a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Note que,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos

$$A^K = A^{K-2} \cdot A^2 = A^{K-2} \cdot 0 = 0,$$

para todo $K \geq 2$, mas $A \neq 0$.

//