PROVA SUBSTITUTIVA - ÁLGEBRA LINEAR

16/07/2022

Questão 2:

a) (F)

Contra-exemplo:

sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

—— // ——

b) (V)

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det A^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\det A} = \det A$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

—— // ——

c) (F)

$$\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+z=3 \\ 5x+y-z=10 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1-3x}{5}$$

$$z=3-2x$$

$$5x+\frac{1-3x}{5}-3+2x=10 \Rightarrow$$

$$25x+1-3x-15+10x=50 \Rightarrow$$

$$32x=64 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y=\frac{1-6}{5} \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$z=3-4 \Rightarrow \boxed{z=-1}$$

$$S=\{(2,-1,-1)\}$$

—— // ——

d) (V)

Note que, $(2,3)\in\mathbb{R}^2$ e

$$1.(2,3)=(1.3,\ 1.2)=(3,2)\neq(2,3)$$

—— // ——

e) (F)

Note que, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$.

—— // ——

f) (V) Por definição, $W \subset M_2(\mathbb{R})$.

. $W \neq \emptyset$, pois $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, basta tomar

$a = 0 = b$.

. Sejam $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \in W$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix} \in W.$$

—————— // ——————

Questão 3:

a) (V)

$W_1 = \{(x, y, z, w) : x + y = w - z \text{ e } y + w = 0\}$

$$\begin{cases} x+y=w-z \\ y+w=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=-w}$$

$$x-w=w-z \Rightarrow \boxed{x=2w-z}$$

$$W_1=\{(2w-z,-w,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(2w,-w,0,w)+(-z,0,z,0): z,w\in\mathbb{R}\}$$
$$=\langle(2,-1,0,1),(-1,0,1,0)\rangle$$

Como esses vetores não são múltiplos escalares um do outro, eles são LI e, portanto base de W_1. Logo

$$\boxed{\dim W_1=2}$$

$$W_2=\{(x,y,z,w): x=y=0 \text{ e } 2w+z=0\}$$
$$z=-2w$$

$$W_2=\{(0,0,-2w,w): w\in\mathbb{R}\}$$
$$=\langle(0,0,-2,1)\rangle$$

$$\boxed{\dim W_2=1}$$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) : x+y = w-z,\ y+w=0,\ x=y=0,\ 2w+z=0\}$

$$\begin{cases} x+y = w-z \\ y+w = 0 \\ x = y = 0 \\ 2w+z=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=0 \Rightarrow w=0 \Rightarrow z=0$$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0,0)\} \Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 0$

Como

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

$= 2 + 1 - 0 = 3$

—— // ——

b) (F) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que

$a(x^3 - 5x^2 + 1) + b(2x^4 + 5x - 6) + c(x^2 - 5x + 2) = 0 \Rightarrow$

$2bx^4 + ax^3 + (c-5a)x^2 + (5b-5c)x + a - 6b + 2c = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2b = 0 & \Rightarrow & b = 0 \\ a = 0 & \Rightarrow & a = 0 \\ c - 5a = 0 & \Rightarrow & c = 0 \\ 5b - 5c = 0 & \Rightarrow & \\ a - 6b + 2c = 0 & & \end{cases}$$

Logo, o conjunto é LI.

—— // ——

e) (V)

Note que, se $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que
$a(1,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,1) = (0,0,0)$,
temos

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - b + c = 0 \Rightarrow (a+c) - b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ b + c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI e como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, segue que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e portanto, $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

—— // ——

d) (F)

Suponha que $(1,-1,2) \in \langle (1,2,3), (3,2,1) \rangle$, daí existiriam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que
$(1,-1,2) = a(1,2,3) + b(3,2,1)$

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 2b = -1 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \xRightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{cases} a + 3b = 1 \\ -4b = -3 \\ -8b = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{8}$ (Absurdo).

— // —

e) (F) Note que,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d, b = c, a = c, b = d \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Portanto, $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ e daí a soma não é direta.

— // —