UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 5: Determinantes

Ementa: Definição, exemplos e propriedades de determinantes de uma matriz.
Objetivos: Entender os métodos de determinação do determinante de uma matriz e saber utilizar suas propriedades na resolução de problemas.

Dada uma matriz quadrada A, o *determinante* de A é um número associado a essa matriz que denotamos por $detA$ ou $|A|$. No caso da matriz A ser de ordem 2 ou 3 temos as seguintes fórmulas para $detA$:

(i) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Exemplo 1 *Seja a matriz* $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, *calcule* $detA$.

Solução:

$$detA = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4.$$

(ii) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Exemplo 2 *Seja a matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, *calcule* $detB$.

Solução:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot -4 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 5 \cdot 7) - (3 \cdot (-4) \cdot (-3)) = -28 + 0 + 0 - 0 - 0 - 36 = -64$

1 Desenvolvimento de Laplace

Dada uma matriz genérica quadrada A, de ordem n, vejamos como obter o determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para cada par $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos a matriz A_{ij} como sendo a submatriz quadrada de A obtida retirando a i-ésima linha e a $j-$ésima coluna. Chamaremos de **cofator** e denotaremos por $\triangle_{ij}$ o número dado por

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|.$$

O determinante da matriz A será dado por

$$detA = a_{i1}\triangle_{i1} + a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + a_{in}\triangle_{in},$$

que chamamos de **desenvolvimento de Laplace (ou expansão em cofatores)**.

Exemplo 3 *Dada a matriz* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *utilize o desenvolvimento de Laplace para calcular* $detC$.

Solução:

$detC = c_{11}\triangle_{11} + c_{12}\triangle_{12} + c_{13}\triangle_{13} + c_{14}\triangle_{14}$

$detC = c_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |C_{11}| + c_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |C_{12}| + c_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |C_{13}| + c_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot |C_{14}|$

$detC = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$detC = 1 \cdot [0+2+2-(0+4-6)] + 0 + 2 \cdot [18+4+0-(2-6+0)] + 0 = 1 \cdot [4+2] + 0 + 2 \cdot [22-(-4)] + 0 = 1 \cdot 6 + 0 + 2 \cdot 26 + 0 = 6 + 0 + 52 + 0 = 58$

$\therefore detC = 58$

2 Propriedades

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Se todos os elementos de uma linha ou coluna de A são nulos, então $detA = 0$;
- $detA = detA^t$;
- Se trocarmos a posição de duas linhas de A, o determinante troca de sinal;
- Se multiplicarmos uma linha de A por uma constante k, então o determinante da nova matriz é igual a $k \cdot detA$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \cdots & k \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

- Se A tiver duas linhas ou duas colunas iguais, seu determinante é nulo;
- O determinante de A não muda se somarmos a uma linha, outra linha multiplicada por uma constante;
- Se A for uma matriz triangular, então o determinante de A será o produto da sua diagonal principal;
- Se $detA = 0$ então não existe A^{-1};
- $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$;
- $det(AB) = detA \cdot detB$.

Exemplo 4 *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$, *determine:*

1. $detA$;
2. $detB$;
3. $det(AB)$.

Solução:

1. $detA = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (4 \cdot 1) = 6 - 4 = 2.$

2. *Note que a matriz B é semelhante a matriz A, sendo que a única coisa que difere ambas é a multiplicação da segunda linha de A por 10. Assim, por meio das propriedades dos determinantes, teremos que $detB = 10 \cdot detA$.*
   $\therefore detB = 10 \cdot 2 = 20.$

3. *Utilizando a propriedade, $det(AB) = detA \cdot detB$, teremos que:*
   $det(AB) = 2 \cdot 20 = 40.$

Exemplo 5 *Seja a matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, determine $detC^{-1}$.*

Solução: *Ao invés de calular a matriz inversa e posteriormente seu determinante, vamos utilizar a propriedade $detC^{-1} = \dfrac{1}{detC}$.*

$detC = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 - 4 - (-6 + 0 + 0) = -16 + 6 = -10.$

$\therefore detC^{-1} = \dfrac{1}{-10} = -\dfrac{1}{10}.$

3 A matriz adjunta

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

a **matriz adjunta** de A, denotada por $adjA$ é a transposta da matriz dos cofatores de A, isto é,

$$adjA = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{12} & \cdots & \triangle_{1n} \\ \triangle_{21} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{n1} & \triangle_{n2} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{21} & \cdots & \triangle_{n1} \\ \triangle_{12} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{1n} & \triangle_{2n} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uma relação entre a matriz A e sua adjunta, é dada por

$$adjA \cdot A = detA \cdot I_n.$$

Portanto, se A é uma matriz inversível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

Além disso,

$$A \quad \text{é inversível} \quad \Leftrightarrow \quad detA \neq 0.$$

Exemplo 6 *Calcule a matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$*, utilizando os conceitos de matriz adjunta.*

Solução: *Se* A*, for uma matriz inversível, logo* $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} adjA$*. Primeiramente encontraremos o* $detA$*:*

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 1 - (2 + 0 + 2) = 7 - 4 = 3.$$

Agora encontraremos $adjA$*, que para tal é necessário a matriz dos cofatores de* A*:*

$$\triangle_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 1 \cdot 2 - 0 = 2$$

$$\triangle_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 2) = (-1) \cdot (2 - 0) = -2$$

$$\triangle_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 1 \cdot (1 - 2) = -1$$

$$\triangle_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-1) \cdot (2 - 1) = -1$$

$$\triangle_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 1 \cdot (6 - 2) = 4$$

$$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = (-1) \cdot (3 - 2) = -1$$

$$\triangle_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

$$\triangle_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (-1) \cdot (0 - 1) = 1$$

$$\triangle_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot (3 - 1) = 2$$

Logo, a matriz cofatores de A*, será:* $\triangle = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Por conseguinte, $adjA = \triangle^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

4 Exercícios

(1) Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.
( ) $det(5A) = 5 \cdot det(A)$;
( ) Sejam B e C, matrizes quadradas de ordem 2, tal que $detB = -2$ e $detC = -3$, então $det(BC) = 6$;
( ) $det(D + E) = detD + detE$;
( ) $det(-F) = detF$;
( ) $detI_n = 1$.

(2) Dada a matriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $detH$;

(b) $detH^2$

(3) Se J é uma matriz quadrada de ordem 4, com $detJ = 5$ e a um número real tal que $det(aJ) = 600$, então qual o valor de a?

(4) Calcule os determinantes das matrizes abaixo, utilizando o desenvolvimento de Laplace.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

(5) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10, determine:$

(a) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 7a & 7b & 7c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(6) Qual o cofator do elemento k_{23} da matriz $K = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$?

(7) Dadas as matrizes abaixo, se possível, calcule as suas respectivas inversas utilizando o conceito de matriz adjunta.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(8) Resolva a seguinte equação

$$\begin{vmatrix} 2+x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

(9) Dada a matriz $L = \begin{bmatrix} x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule x para que L seja inversível.

(10) Determine a matriz adjunta de $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.