UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 2 - 16/05/2018

Questão 1: Queremos encontrar três números positivos x, y, z tais que o produto $p(x, y, z) = xyz$ seja o máximo e além disso, $x + y + z = a$, para um número positivo a fixado. Logo temos um problema de determinar um máximo dada uma restrição. Vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x, y, z) = x + y + z$. Então temos:

$$\begin{cases} \nabla p(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ yx = \lambda \\ x + y + z = a \end{cases}$$

Usando a primeira e a segunda equações obtemos $x = y$. E utilizando a segunda e terceira equações obtemos $y = z$. Lembrando que x, y e z são positivos, logo não nulos. Substituindo o obtido na quarta equação obtemos $x = y = z = \dfrac{a}{3}$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange obtemos que o ponto $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$ é um ponto de máximo ou mínimo de p dada a restrição. No entanto, observe que

$$p\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) = \frac{a^3}{32} < \frac{a^3}{27} = p\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

Portanto o ponto encontrado é um ponto de máximo de p, dada a restrição.

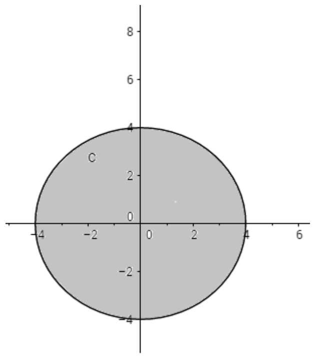
Questão 2:

(a) **Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis:** Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

(b) Queremos determinar os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$

na região esboçada abaixo:



Vamos utilizar o algoritmo para determinar os valores extremos de uma função de duas variáveis em um conjunto fechado e limitado.

(i) Determinação dos pontos críticos de f no interior da região dada:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (4x-4, 6y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0).$$

(ii) Valores de f nos pontos encontrados no passo anterior:

$$f(1,0) = -7.$$

(iii) Valores extremos de f na fronteira da região fechada e limitada:

A fronteira de da região é a circunferência $x^2+y^2 = 16$. Logo usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o máximo e o mínimo de f sobre esse círculo:

Seja $g(x,y) = x^2+y^2$, daí

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-4 = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 16. \end{cases}$$

Da segunda equação temos

$$3y - \lambda y = 0 \Rightarrow y(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3.$$

Se $y = 0$, pela terceira equação $x = \pm 4$ e daí temos os pontos $(4,0)$ e $(-4,0)$.

Se $\lambda = 3$, pela primeira equação $x = -2$ e daí pela terceira equação $y = \pm 2\sqrt{3}$.

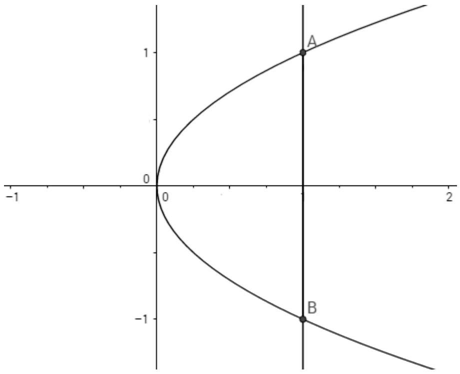
E

$$f(4,0) = 11; \quad f(-4,0) = 43, \quad f(-2, \pm\sqrt{3}) = 47.$$

iv) Valores máximo e mínimo absolutos:

Pelos itens anteriores segue que $f(-2, \pm\sqrt{3}) = 47$ é máximo absoluto de f na região dada e $f(1,0) = -7$ é mínimo absoluto de f na região dada.

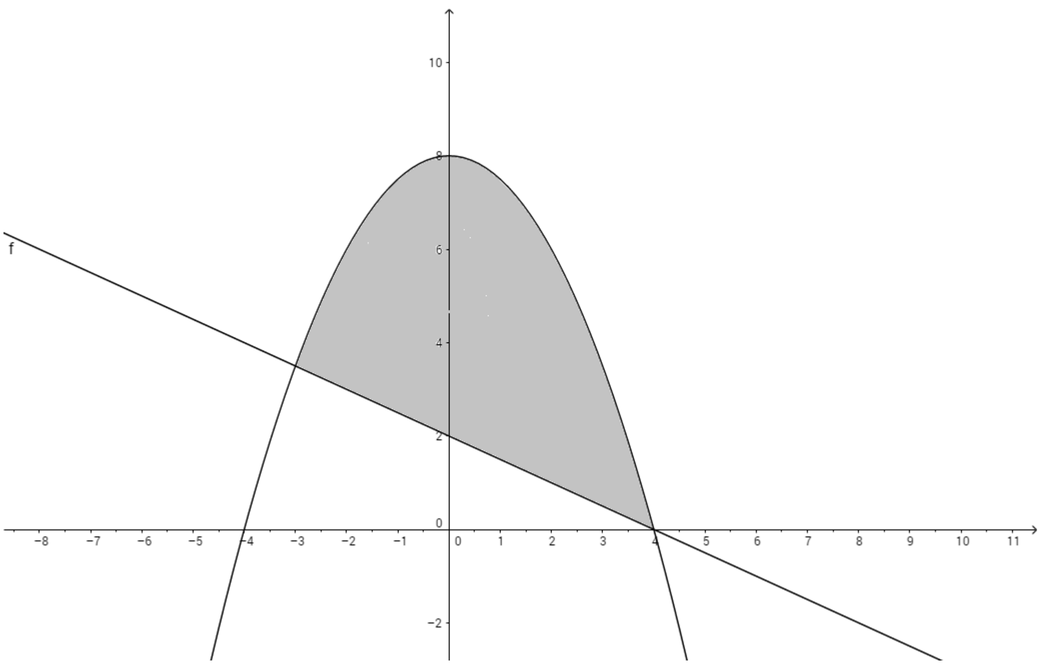
Questão 3: Observe que queremos calcular o volume abaixo do plano $x + z = 1$ e acima de uma região do plano xy delimitada pelpela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 1$ (intersecção do plano $x + z = 1$ com o plano xy).



Região de integração: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\, y^2 \leq x \leq 1\}$.
Logo, o volume procurado será

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} (1-x)\, dydx = \frac{8}{15}.$$

Questão 4: Observe que a região de D é:



Região de integração: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 3,\, -\frac{1}{2}x + 2 \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 8\}$.

Assim a área de D é dada por:

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{-4}^{3} \int_{-\frac{1}{2}x+2}^{-\frac{1}{2}x^2+8} dydx = \frac{343}{12}.$$

Questão 5: Vamos utilizar o teste da derivada segunda para determinar e classificar os pontos críticos de

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Calculando as derivadas parciais de f e o determinante da matriz Hessiana $H(x,y)$, obtemos

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y; \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x;$$

$$f_{xx}(x,y) = 6x; \quad f_{yy}(x,y) = 6y; \quad f_{xy}(x,y) = -3.$$

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = 36xy - 9.$$

Determinemos agora os pontos críticos de f, isto é, os pontos (x,y) do domínio de f tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ou onde o gradiente não existe.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}.$$

Da primeira equação vemos que $y = x^2$. Substituindo na segunda equação, temos

$$x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Se $x = 0 \Rightarrow y = 0$ e se $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Pontos críticos: $(0,0), (1,1)$.

Fazendo o teste da derivada segunda, temos:

$$H(0,0) = -9 < 0 \Rightarrow (0,0) \quad \text{é ponto de sela.}$$

$$H(1,1) = 27 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow (1,1) \quad \text{é ponto de mínimo local.}$$

Questão 6:

(a) **Teorema de Fubini:** Se a função $z = f(x,y)$ é contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, então a integral dupla de f sobre R pode ser obtida através de integrais iteradas, ou seja:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy.$$

(b)

$$\iint_R y\,\text{sen}x \cos y\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}x \cos y\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}x\, \text{sen}y)_0^{\frac{\pi}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}x)dx = (-cosx)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$