PROVA 3: ÁLGEBRA LINEAR - TURMA CC

Questão 1:

a) Seja $T: V \to W$ uma aplicação entre os $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W. Dizemos que T é uma transformação linear se:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad \forall\, u, v \in V$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$.

—————— // ——————

b) Uma transformação linear $T: V \to W$ é:

(i) injetora, se sempre que tivermos $T(u) = T(v)$ implicar em $u = v$.

(ii) sobrejetora, se $\mathrm{Im}(T) = W$.

—————— // ——————

c) Seja $T: V \to W$ uma transformação linear com V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Então

$$\dim V = \dim N(T) + \dim Im(T).$$

$//$

Questão 2:

a) Sejam $u = (x, y, z)$, $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cdot\ T(u+v) &= T(x+a, y+b, z+c) \\
&= (3x+3a, x+a-(y+b), 2x+2a+y+b+z+c) \\
&= (3x, x-y, 2x+y+z) + (3a, a-b, 2a+b+c) \\
&= T(x,y,z) + T(a,b,c) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot\ T(\alpha u) &= T(\alpha(x,y,z)) \\
&= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= (3\alpha x, \alpha x - \alpha y, 2\alpha x + \alpha y + \alpha z) \\
&= \alpha(3x, x-y, 2x+y+z) \\
&= \alpha T(x,y,z) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}$$

$//$

b) $T(1,1,1) = (3,0,4) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,2)$

$T(0,1,1) = (0,-1,2) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 1(0,0,2)$

$T(0,0,1) = (0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,2)$

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

———————— // ————————

c) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (3x, x-y, 2x+y+z) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$$

$N(T) = \{(0,0,0)\}$

———————— // ————————

d) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

Como $\dim N(T) = 0$, temos

$\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3$ e

portanto T é sobrejetora. Além disso, como $N(T)=\{(0,0,0)\}$, T é injetora.

Logo T é isomorfismo e existe T^{-1}.

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c)$$

Vamos determinar (a,b,c)

$$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Rightarrow$$
$$T(T^{-1}(x,y,z)) = T(a,b,c) \Rightarrow$$
$$(x,y,z) = (3a, a-b, 2a+b+c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a = x \\ a-b = y \\ 2a+b+c = z \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow b = a - y$$
$$b = \frac{x}{3} - y \Rightarrow b = \frac{x-3y}{3}$$

$$c = z - 2a - b$$
$$c = z - \frac{2x}{3} - \left(\frac{x-3y}{3}\right)$$

$$c = \frac{3z - 3x + 3y}{3}$$

$$c = z - x + y$$

$$\therefore\ T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x-3y}{3}, z - x + y \right)$$

$[T^{-1}] = ?$

$$T^{-1}(1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1 \right)$$

$$T^{-1}(0,1,0) = (0,-1,1)$$

$$T^{-1}(0,0,1) = (0,0,1)$$

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 3:

a) $T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (-2,1,2)$

$T(0,0,1) = (-2,0,3)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)^2 (3-\lambda)$$

b) $p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

---

c) $\cdot\ \lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow z = -y$$

$v = (x, y, -y),\ x^2 + y^2 \neq 0$

$\cdot\ \lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array}$$

$v = (x, 0, -x),\ x \neq 0$

---

d) Sim, T é diagonalizável.

$\alpha = \{(1,0,0), (0,1,-1), (1,0,-1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

——— // ———

Questão 4:

a) (F)

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

Se T é sobrejetora,

$\dim Im\, T = \dim P_4(\mathbb{R}) = 5 > \dim \mathbb{R}^4$.

——— // ———

b) (V)

Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto LI de V. Vamos mostrar que $\beta = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é LI.

Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0 \Rightarrow$

$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow$

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in N(T) = \{0\}$, pois T é injetora

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow$

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, pois α é LI.

Portanto, β é LI.

—— // ——

e) (V)

$D(1+x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$D(1-x) = -1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—— // ——

d) (V)

$p_T(\lambda) = (1+\lambda)(2+\lambda)(2-\lambda)$

$p_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = -2$ ou $\lambda = 2$

Como T possui 3 autovalores distintos e $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, segue que T é diagonalizável.

—— // ——

e) (V)

—— // ——