UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 2 - 18/05/2018

Questão 1:

(a) Vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Então temos:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\lambda x \\ 0 = 2\lambda y \\ 2z = -\lambda \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

Da primeira e segunda equações observemos que temos duas possibildiades: $x = 0 = y$ ou $\lambda = 0$.
Se $x = 0 = y$ então pela quarta equação segue que $z = 0$.

Se $\lambda = 0$, pela terceira equação segue que $z = 0$ e daí pela quarta equação $x^2 + y^2 = 0$, o que ocorre somente se $x = 0 = y$.

Portanto o único ponto crítico é $(0, 0, 0)$.

(b) Como utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange no item anterior, já sabemos que dada a restrição, o ponto encontrado é ponto de máximo ou de mínimo. Agora observe que

$$f(x, y, z) = z^2 \geq 0 = f(0, 0, 0).$$

Portanto $(0, 0, 0)$ é ponto de mínimo absoluto de f sobre a superfície $x^2 + y^2 - z = 0$.

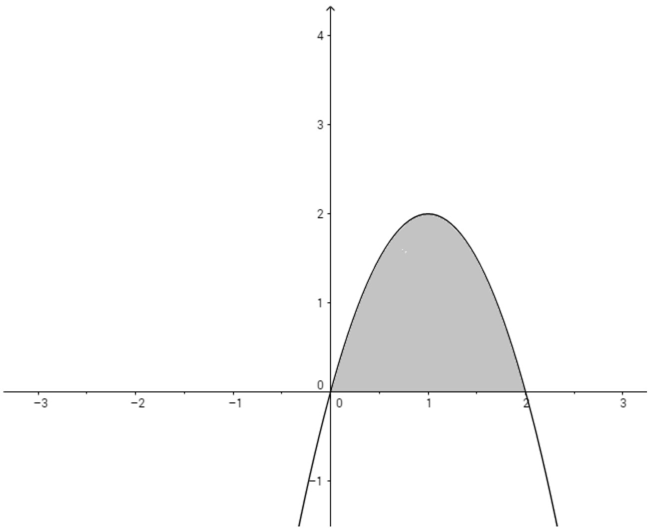
Questão 2:

(a) **Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis:** Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

(b) Queremos determinar os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

na região esboçada abaixo:



Vamos utilizar o algoritmo para determinar os valores extremos de uma função de duas variáveis em um conjunto fechado e limitado.

(i) Determinação dos pontos críticos de f no interior da região dada:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow ((2-2x)(2y-y^2), (2x-x^2)(2-2y)) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2x)(2y-y^2) = 0 \\ (2x-x^2)(2-2y) = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação $x = 1$ ou $y = 0$ ou $y = 2$.

Se $x = 1$, pela segunda equação temos $y = 1$ e encontramos o ponto $(1,1)$.

Se $y = 0$, pela segunda euqação temos $x = 0$ ou $x = 2$ e encontramos os pontos $(0,0)$ e $(2,0)$.

Se $y = 2$, da segunda equação temos $x = 0$ ou $x = 2$ e encontramos os pontos $(0,2)$ e $(2,2)$.

Observe que dos pontos encontrados, somente o ponto $(1,1)$ está no interior da região.

(ii) Valores de f nos pontos encontrados no passo anterior:

$$f(1,1) = 1.$$

(iii) Valores extremos de f na fronteira da região fechada e limitada:

No segmento de reta que compões a fronteira da região, isto é, o segmento que vai da origem até o ponto $(2,0)$, todos os pontos são da forma $(x,0)$, com $0 \leq x \leq 2$ e, além disso, $f(x,0) = 0$.

Na outra parte da fronteira da região, os pontos pertencem a parábola $y = 2(2x - x^2)$, para $0 \leq y \leq 2$, logo para estes pontos $\dfrac{y}{2} = (2x - x^2)$. Vamos calcular f nestes pontos. Neste caso teremos:

$$f(x,y) = g(y) = \frac{y}{2}(2y - y^2) = y^2 - \frac{y^3}{2}.$$

Usando o Teorema dos Valores Extremos para funções de uma variável e o algoritmo para determinação dos valores extremos no intervalo $0 \leq y \leq 2$, temos

$$g'(y) = 2y - 3\frac{y^2}{2} \quad \text{e} \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{4}{3}.$$

$$y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0) \quad \text{ou} \quad (x,y) = (2,0).$$

$$y = \frac{4}{3} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{ou} \quad (x,y) = \left(-\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

E nos extremos do intervalo temos $y = 0$ e $y = 2$ o que nos dá os pontos

$$(0,0); \quad (2,0); \quad (1,2).$$

Calculando f nestes pontos, temos:

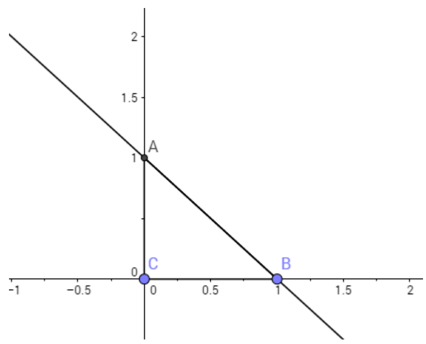
$$f(0,0) = 0; \quad f(2,0) = 0; \quad f(1,2) = 0;$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27}.$$

iv) Valores máximo e mínimo absolutos:

Pelos itens anteriores segue que $f(1,1) = 1$ é máximo absoluto de f na região dada e $f(0,0) = 0$ é mínimo absoluto de f na região dada.

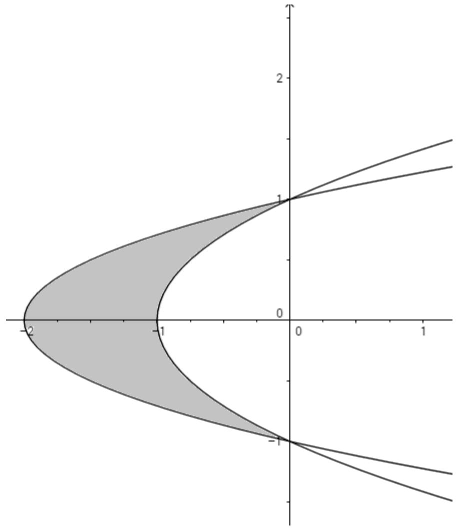
Questão 3: Observe que queremos calcular o volume abaixo do plano $x+y+z = 1$ e acima de uma região do plano xy delimitada pelos eixos x e y e pela reta $y = 1 - x$ (intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o plano xy).



Região de integração: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.
Logo, o volume procurado será

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx = \frac{1}{6}.$$

Questão 4: Observe que a região de D é:



Região de integração: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ 2y^2 - 2 \leq x \leq y^2 - 1\}$.

Assim a área de D é dada por:

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dxdy = \frac{4}{3}.$$

Questão 5: Vamos utilizar o teste da derivada segunda para determinar e classificar os pontos críticos de

$$f(x, y) = xy^2 + 3x^3 - x + 5.$$

Calculando as derivadas parciais de f e o determinante da matriz Hessiana $H(x, y)$, obtemos

$$f_x(x, y) = y^2 + 9x^2 - 1; \quad f_y(x, y) = 2xy;$$

$$f_{xx}(x, y) = 18x; \quad f_{yy}(x, y) = 2x; \quad f_{xy}(x, y) = 2y.$$

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 36x^2 - 4y^2.$$

Determinemos agora os pontos críticos de f, isto é, os pontos (x, y) do domínio de f tais que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ou onde o gradiente não existe.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 9x^2 = 1 \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

Da segunda equação vemos que $x = 0$ ou $y = 0$.
Se $x = 0$, substituindo na primeira equação, obtemos $y = \pm 1$, daí encontramos os pontos

$(0,-1)$ e $(0,1)$.

Se $y=0$, substituindo na primeira equação, obtemos $x=\pm\frac{1}{3}$, daí encontramos os pontos $(-\frac{1}{3},0)$ e $(\frac{1}{3},0)$.

Pontos críticos: $(0,-1),(0,1),(-\frac{1}{3},0),(\frac{1}{3},0)$.

Fazendo o teste da derivada segunda, temos:

$$H(0,-1)=H(0,1)=-4<0 \Rightarrow (0,-1) \quad \text{e} \quad (0,1) \quad \text{são pontos de sela.}$$

$$H\left(-\frac{1}{3},0\right)=4>0 \quad \text{e} \quad f_{xx}\left(-\frac{1}{3},0\right)=-6<0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3},0\right) \quad \text{é ponto de máximo local.}$$

$$H\left(\frac{1}{3},0\right)=4>0 \quad \text{e} \quad f_{xx}\left(\frac{1}{3},0\right)=6>0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3},0\right) \quad \text{é ponto de mínimo local.}$$

Questão 6:

(a) **Teorema de Fubini:** Se a função $z=f(x,y)$ é contínua no retângulo $R=[a,b]\times[c,d]$, então a integral dupla de f sobre R pode ser obtida através de integrais iteradas, ou seja:

$$\iint\limits_R f(x,y)dA=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

(b)

$$\iint\limits_R y\,\text{sen}(xy)\,dA=\int_0^\pi\int_1^2 y\text{sen}(xy)\,dxdy=\int_0^\pi\left(-y\frac{\cos(xy)}{y}\right)_1^2 dy$$

$$=\int_0^\pi(-\cos(2y)+\cos(y))dy=\left(-\frac{\text{sen}(2y)}{2}+\text{sen}y\right)_0^\pi=0.$$