P2 - Álgebra Linear - Turma MA
28/06/2022

Questão 1:

a) Note que V_1 e V_2 são conjuntos não vazios, pois a função nula pertence aos dois conjuntos, já que a função $0_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e ímpar.
$$x \mapsto 0$$

• Para mostrarmos que V_1 é subespaço de V, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in V_1$.
Isto é, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Daí, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$$
$$= (f+g)(-x)$$

Logo, $f+g \in V_1$.

Além disso, dado $x \in \mathbb{R}$, temos

$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) = \alpha(f(-x)) = (\alpha f)(-x)$.

Logo $\alpha f \in V_1$

E portanto V_1 é subespaço de V.

• Para mostrarmos que V_2 é subespaço de V, considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in V_2$, isto é, $f(x) = -f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Daí, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) = f(x) + g(x) &= -f(-x) - g(-x)\\ &= -(f(-x) + g(-x))\\ &= -(f+g)(-x)\end{aligned}$$

Logo, $f+g \in V_2$.

Além disso, dado $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) &= \alpha(-f(-x))\\ &= -\alpha(f(-x))\\ &= -(\alpha f)(-x)\end{aligned}$$

Logo, $\alpha f \in V_2$ e portanto V_2 é subespaço de V.

—— // ——

b) Seja $f \in V_1 \cap V_2$, daí temos

$$f \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} f \in V_1 \\ \text{e} \\ f \in V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(-x) \\ \text{e} \\ f(x) = -f(-x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(-x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto,

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$, onde 0 é a função nula.

Daí, a soma $V_1 + V_2$ é direta.

Resta mostrarmos que $V = V_1 + V_2$, isto é, devemos mostrar que dada qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos escrevê-la como uma soma $g(x) + h(x)$, onde $g \in V_1$ e $h \in V_2$, ou seja, g é uma função par e h é uma função ímpar.

Note que, dado $f \in V$, temos que

- $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ é par.

De fato, $g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$.

Logo, $g \in V_1$.

- $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ é ímpar.

De fato, $h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$

Logo, $h \in V_2$

E ainda,

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= f(x)$$

Portanto, $f = g + h$ e daí $V = V_1 + V_2$, como queríamos mostrar.

//

Questão 2:

Devemos verificar se dado um vetor $(0,a,b) \in W$, podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores $u=(0,1,2)$ e $v=(0,-1,1)$.

Vejamos se encontramos $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,a,b) = xu + yv$$
$$= (0,x,2x) + (0,-y,y)$$
$$= (0, x-y, 2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \Rightarrow y = x - a$$

$$\Rightarrow 2x + x - a = b$$

$$\Rightarrow 3x = b + a$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{b+a}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b+a}{3} - a$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{b-2a}{3}}$$

Portanto, $W = \langle u, v \rangle$.

//

Questão 3:

a) Um conjunto é linearmente independente se qualquer combinação linear dos seus elementos dando o vetor nulo só é possível se os escalares na combinação forem todos nulos. Caso contrário, o conjunto é dito linearmente dependente.

//

b) Sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ tais que,

$$a.(\bar{1},\bar{1},\bar{0}) + b(\bar{1},\bar{0},\bar{1}) + c(\bar{0},\bar{1},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a},\bar{a},\bar{0}) + (\bar{b},\bar{0},\bar{b}) + (\bar{0},\bar{c},\bar{c}) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a}+\bar{b} = \bar{0} & \Rightarrow \bar{a} = -\bar{b} \\ \bar{a}+\bar{c} = \bar{0} & \Rightarrow \bar{a} = -\bar{c} \\ \bar{b}+\bar{c} = \bar{0} & \Rightarrow \bar{b} = -\bar{c} \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} \bar{a} = -\bar{c} \\ \bar{b} = -\bar{c} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

$\left.\begin{matrix} \bar{a} = -\bar{b} \\ \bar{a} = \bar{b} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{b} = -\bar{b}$

Logo, $\bar{b} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{1}$, já que, $\bar{1} = -\bar{1}$.

Portanto, o conjunto é linearmente dependente. Observe que, podemos tomar $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{1}$ e teremos

$$\bar{1}(\bar{1},\bar{1},\bar{0}) + \bar{1}(\bar{1},\bar{0},\bar{1}) + \bar{1}(\bar{0},\bar{1},\bar{1}) =$$
$$(\bar{1},\bar{1},\bar{0}) + (\bar{1},\bar{0},\bar{1}) + (\bar{0},\bar{1},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0}),$$

já que, $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$.

Questão 4:

(i) Vejamos se $\mathcal{B}$ gera todo o espaço $P_3(\mathbb{R})$. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ e vamos verificar se existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que:

$$p(x) = a(1) + b(1+x) + c(1-x^2) + d(1-x-x^2-x^3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d = a_0 \\ b-d = a_1 \\ -c-d = a_2 \\ -d = a_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = -a_3}$$

$\Rightarrow -c = a_2 - a_3 \Rightarrow \boxed{c = a_3 - a_2}$

$b - d = a_1 \Rightarrow \boxed{b = a_1 - a_3}$

$a + b + c + d = a_0 \Rightarrow a + a_1 - \cancel{a_3} + \cancel{a_3} - a_2 - a_3 = a_0$

$\Rightarrow \boxed{a = a_0 - a_1 + a_2 + a_3}$ //

Logo, $\langle B \rangle = P_3(\mathbb{R})$.

(ii) Resta verificar se B é LI.
Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1) + b(1+x) + c(1-x^2) + d(1-x-x^2-x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b - d = 0 \\ -c - d = 0 \\ -d = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 0$$

$\Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow a = 0$

Logo, B é LI e portanto, é uma

base de $P_3(\mathbb{R})$.

Obs: Usando argumentos de dimensão, apenas (i) ou (ii) seria suficiente para solução do exercício.

———— // ————

Questão 5:

a) Dado $w \in W_1 + W_2$, por definição, $w = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$.
E como $w_1 + w_2$ é uma combinação linear de w_1 e w_2 que são elementos da união $W_1 \cup W_2$, é claro que $w = w_1 + w_2 \in \langle W_1 \cup W_2 \rangle$ e então $W_1 + W_2 \subset \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.
Por outro lado, seja $v \in \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.
Então, por definição v é uma combinação linear de elementos de $W_1 \cup W_2$. Ou seja,
$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$,
com $a_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in W_1 \cup W_2$, para todo $1 \leq i \leq n$.
Podemos reorganizar os índices na soma de v de forma que tenhamos

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \cdots + a_n v_n,$$

com $v_i \in W_1$, para todo $1 \leq i \leq k$ e
$v_j \in W_2$, para todo $k+1 \leq j \leq n$.

Dessa forma, teremos

$$v = w_1 + w_2,$$

onde

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \in W_1$$

$$w_2 = a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in W_2$$

E daí, $v \in W_1 + W_2$.
Logo, $\langle W_1 \cup W_2 \rangle \subset W_1 + W_2$ e

portanto $\langle W_1 \cup W_2 \rangle = W_1 + W_2$.

---

b) Note que, como v_1 e v_2 não são múltiplos escalares um do outro, então $\{v_1, v_2\}$ é LI. Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de U e daí

$\dim U = 2.$

E claro que, $\dim V = 1.$

Como $V = \langle v_3 \rangle$ e $v_3 = v_1 + v_2 \in U$, então $V \subset U$. Logo

$$U \cap V = V,$$

daí $\dim(U \cap V) = \dim V = \underline{\underline{1}}.$

E sabemos que,

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$
$$= 2 + 1 - 1$$
$$= 2$$

—— // ——

Questão extra:

- Mostremos que S é subespaço de V.

(i) $S \neq \emptyset$, pois $p: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x) = 0$ pertence a S, já que, $p(-1) = 0$ e $p'(x) = 0$, logo $p'(1) = 0$.

(ii) Sejam $p, q \in S$, isto é

$p(-1)=0$; $p'(1)=0$

$q(-1)=0$; $q'(1)=0$

Daí,

$(p+q)(-1) = p(-1)+q(-1) = 0+0 = 0$ e

$(p'+q')(1) = p'(1)+q'(1) = 0+0 = 0$

Logo $p+q \in S$.

(iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in S$, ou seja, $p(-1)=0$ e $p'(1)=0$.

Daí

$(\alpha p)(-1) = \alpha(p(-1)) = \alpha \cdot 0 = 0$ e

$(\alpha p)'(1) = \alpha(p'(1)) = \alpha \cdot 0 = 0$

Logo, $\alpha p \in S$ e portanto S é subespaço de V.

• Vamos determinar uma base para S.

Seja $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in S$,

daí, $p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

Logo,

$p(-1) = 0 \Leftrightarrow -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0$

$p'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$

Resolvendo o sistema temos:

$$\begin{cases} -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3 = \frac{-2a_2 - a_1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_2 + a_1}{3} + a_2 - a_1 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 + a_1 + 3a_2 - 3a_1 + 3a_0 = 0$$

$$\Rightarrow 5a_2 = 2a_1 - 3a_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a_2 = \frac{2a_1 - 3a_0}{5}}$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}\left(\frac{2a_1 - 3a_0}{5}\right) - \frac{a_1}{3}$$

$$\Rightarrow a_3 = -\frac{4}{15}a_1 + \frac{2}{5}a_0 - \frac{a_1}{3}$$

$$\Rightarrow a_3 = -\frac{9}{15}a_1 + \frac{2}{5}a_0.$$

$$\Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_0}$$

Logo, podemos reescrever S como

$$S = \left\{\left(-\frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_0\right)x^3 + \left(\frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_0\right)x^2 + a_1x + a_0\right\}$$

$$= \left\{\left(-\frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + x\right)a_1 + \left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 1\right)a_0\right\}$$

$$= \left\langle\left(-\frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + x, \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 1\right)\right\rangle$$

Como, os polinômios acima não são múltiplos escalares um do outro, então temos uma base para S.

Portanto, $\dim S = 2$.