UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*
Prof. *Victor Martins*

Prova 1 - 04/10/2018

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente os cálculos e justificativas para cada solução. É proibido o uso de calculadoras.)

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: Seja $f(x,y) = \sqrt{\frac{24-6x^2-2y^2}{3}}$.

(a) *(1,0 ponto)* Determine e esboce o domínio de f.

(b) *(1,0 ponto)* Encontre a curva de nível C da função f que contém o ponto $P = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Questão 2: Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *(0,8 pontos)* f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(b) *(0,8 pontos)* Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) *(0,4 pontos)* f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

Questão 3:

(a) *(0,5 pontos)* Enuncie o Teorema de Clairaut.

(b) *(1,0 ponto)* Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4+3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) *(0,5 pontos)* Mostre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Questão 4:

(a) *(1 ponto)* Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ no ponto $(4, -1, 1)$.

(b) *(1 ponto)* Sabendo que $z = f(x, y)$ é definida implicitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Questão 5:

(a) *(1 ponto)* Mostre que se f é uma função diferenciável de duas ou três variáveis, então o valor mínimo da derivada direcional $D_u f(X)$ é $-|\nabla f(X)|$ e ocorre quando u tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(X)$, porém sentido contrário.

(b) *(1 ponto)* Suponha que $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy (T em $°C$, e x, y em cm). Estando-se em $P(2, \frac{1}{2})$, qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? E o de menor? Qual a taxa de crescimento nestas direções?

Questão Extra:

(a) *(1 ponto)* Mostre que se A e B são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ então $A \cup B$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

(b) *(1 ponto)* A **fronteira** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto frX formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda bola de centro x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n - X$. Determine a fronteira de $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq 3 \text{ e } y + x \geq 0 \text{ e } y - x \geq -1\}$.

BOA PROVA!