PROVA3 - ÁLGEBRA LINEAR-TURMA MA

Questão 1:

a) Uma transformação linear $T: V \to W$ é um isomorfismo se for bijetora.

—— // ——

b) Um operador linear é uma transformação linear de um espaço V nele próprio, isto é, da forma $T: V \to V$.

—— // ——

c) Uma operador linear $T: V \to V$ é diagonalizável se existe uma base α de V tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz diagonal.

—— // ——

Questão 2:

a) Sejam $u=(x,y,z), v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Temos

$$
\begin{aligned}
\cdot\ T(u+v) &= T(x+a, y+b, z+c) \\
&= (x+a-2(y+b), z+c, x+a+(y+b)) \\
&= (x-2y, z, x+y) + (a-2b, c, a+b) \\
&= T(x,y,z) + T(a,b,c) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot\ T(\alpha u) &= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\
&= (\alpha x - 2\alpha y, \alpha z, \alpha x + \alpha y) \\
&= \alpha(x-2y, z, x+y) \\
&= \alpha T(x,y,z) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}
$$

Portanto, T é linear.

—— // ——

b) $T(1,1,1) = (-1,1,2) = -1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,2)$

$T(0,1,1) = (-2,1,1) = -2(1,0,0) + 1(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,2)$

$T(0,0,1) = (0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,2)$

Portanto,

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

———— // ————

c) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2y, z, x+y) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, \quad y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\therefore\ N(T) = \{(0,0,0)\}$.

———— // ————

d) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$
$$3 = 0 + \dim \operatorname{Im}(T).$$

Portanto, $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3$ e

daí que T é sobrejetora. Como $N(T) = \{(0,0,0)\}$, T é injetora.
Logo T é um isomorfismo e existe T^{-1}.

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c)$$

Vamos determinar (a,b,c).

$$T^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Rightarrow$$
$$T(T^{-1}(x,y,z)) = T(a,b,c) \Rightarrow$$
$$(x,y,z) = (a-2b, c, a+b) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - 2b = x \\ \boxed{c = y} \\ a + b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = x \\ -a - b = -z \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3b = x - z \Rightarrow \boxed{b = \frac{z-x}{3}}$$

$$a = z - b \Rightarrow a = z - \left(\frac{z-x}{3}\right)$$
$$a = \frac{2z+x}{3}$$

Logo, $T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{2z+x}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$

- $[T^{-1}] = ?$

$T^{-1}(1,0,0) = (1/3, -1/3, 0)$
$T^{-1}(0,1,0) = (0, 0, 1)$
$T^{-1}(0,0,1) = (2/3, 1/3, 0)$

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

//

Questão 3:

a) $T(1,0,0) = (3,0,0)$
$T(0,1,0) = (0,3,0)$
$T(0,0,1) = (-4,5,-1)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

//

b) $p_T(\lambda) = -(3-\lambda)^2(1+\lambda)$

//

c) $p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

//

d) • $\lambda = 3$

$v = (x, y, 0), \; x^2 + y^2 \neq 0$

• $\lambda = -1$

$v = \left(z, -\frac{5}{4}z, z\right), \; z \neq 0$

---

e) Sim, T é diagonalizável.

$\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (4,-5,4)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questão 4:

a) (F)

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos

$\dim P_3(\mathbb{R}) = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$,

se T fosse injetora teríamos que $\dim N(T) = 0$ e então teríamos

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim P_3(\mathbb{R}) = 4,$$

mas $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$, logo $\dim \operatorname{Im}(T) \leq 3$.

——— // ———

b) (F)

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Note que,

$T(A) + T(B) = \det A + \det B = 1 + 1 = 2$,

mas

$$T(A+B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

——— // ———

c) (V) Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, devemos mostrar que $\beta = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é base de W. Note que, como o número de elementos de β é igual a $\dim W$, basta mostrar que β é um conjunto LI.

Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0 \Rightarrow$$

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow$$

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in N(T) = \{0\}$, pois T é injetora $\Rightarrow$

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow$$

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, pois α é base de V e, portanto é LI.

Logo β é um conjunto LI e daí, é base de W.

—————— // ——————

d) (V)

Temos que $[T] = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e daí

$p_T(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$ e então $\lambda = -2$ e $\lambda = 1$ são autovalores de T. Como temos dois autovalores distintos e o espaço $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2, segue que T é diagonalizável.

———— // ————

e) (V)

Podemos definir, por exemplo,

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na base canônica da seguinte forma:

$$T(1,0) = (0,0) \text{ e } T(0,1) = (1,0)$$

Logo,

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1))$$
$$= xT(1,0) + yT(0,1)$$

$$= y(1,0) = (y,0)$$

$$T(x,y) = (y,0)$$

$$N(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,0) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle$$

e

$$Im(T) = \{(y,0) : y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,0) \rangle.$$