Resolução P3 - Álgebra linear - 18/07/2023

Questão 1:

a) Sejam $x, y, k \in \mathbb{R}$.

$$\cdot\, T(x+y) = (x+y, 2(x+y), -(x+y))$$
$$= (x, 2x, -x) + (y, 2y, -y)$$
$$= T(x) + T(y)$$

$$\cdot\, T(kx) = (kx, 2kx, -kx)$$
$$= k(x, 2x, -x)$$
$$= k\,T(x)$$

Portanto, T é uma transformação linear.

—— // ——

b) Sejam $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$\cdot\, T((x,y,z)+(a,b,c)) = T(x+a, y+b, z+c)$$
$$= (x+a, 2(y+b), 0)$$

$= (x, 2y, 0) + (a, 2b, 0)$
$= T(x,y,z) + T(a,b,c)$

$\cdot\ T(k(x,y,z)) = T(kx, ky, kz)$
$= (kx, 2ky, 0)$
$= k(x, 2y, 0)$
$= k\,T(x,y,z)$

Portanto, T é uma transformação linear.

—— // ——

e) Note que,

$T(0,0) = (0,0) + v = v \neq (0,0)$, pois v é um vetor não nulo.

Portanto, T não é uma transformação linear.

—— // ——

Questão 2:

a) $T(x,y) = (2x - y, x + y)$

$$N(T)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : T(x,y)=(0,0)\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (2x-y,\, x+y)=(0,0)\}$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$
$$3x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

$\therefore N(T)=\{(0,0)\} \Rightarrow \dim N(T)=0$ e T é injetora

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim N(T) + \dim Im(T)$$
$$2 = 0 + \dim Im(T)$$

Logo, $\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ e daí T é sobrejetora.

Portanto, T é um isomorfismo e existe T^{-1}.

- Determinando $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T^{-1}(x,y) = (a,b) \Rightarrow$

$$T(T^{-1}(x,y)) = T(a,b) \Rightarrow$$

$$(x,y) = (2a-b, a+b) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a - b = x \\ a + b = y \end{cases}$$

$$3a = x+y \Rightarrow \boxed{a = \frac{x+y}{3}}$$

$$b = y - a \Rightarrow b = y - \frac{x+y}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{2y-x}{3}}$$

Portanto, $T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2y-x}{3}\right)$

b) $T(x,y,z) = (x-3y+5z, -x+4y-z)$

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3y+5z, -x+4y-z) = (0,0)\}$$

$$\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ -x+4y-z=0 \end{cases} \Rightarrow x=3y-5z$$

$$\Rightarrow -3y+5z+4y-z=0$$

$$\Rightarrow y+4z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-4z}$$

$$x=3y-5z \Rightarrow x=-12z-5z$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-17z}$$

$$N(T)=\{(-17z,-4z,z): z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\langle(-17,-4,1)\rangle$$
$$\Rightarrow \dim N(T)=1 \Rightarrow T \text{ não é injetora}$$

Pelo T. do núcleo e da Imagem,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T) \Rightarrow$$
$$3 = 1 + \dim Im(T) \Rightarrow$$
$$\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2,$$

portanto, T é sobrejetora.

Como T não é injetora, então T não é isomorfismo.

—— // ——

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$

Note que, $\{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$(a,b,c) = a(1,0,1) + b(0,1,0) + (c-a)(0,0,1)$$

Daí

$$T(a,b,c) = aT(1,0,1) + bT(0,1,0) + (c-a)T(0,0,1)$$
$$= a(2+x^2+x^3) + b(1+x^2) + (c-a)(x^2-x^3)$$
$$= (a-(c-a))x^3 + (a+b+c-a)x^2 + (2a+b)$$

Portanto,

$$T(a,b,c) = (2a-c)x^3 + (b+c)x^2 + (2a+b)$$

$$N(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = 0\}$$
$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (2a-c)x^3 + (b+c)x^2 + (2a+b) = 0\}$$

$$\begin{cases} 2a-c=0 & \Rightarrow \boxed{c=2a} \\ b+c=0 & \Rightarrow c=-b \Rightarrow \boxed{b=-2a} \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

$N(T) = \{(a, -2a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1, -2, 2) \rangle$

$\Rightarrow \dim N(T) = 1 \Rightarrow$ T não é injetora.

Pelo T. do núcleo e da Imagem,

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(T) + \dim Im(T)$
$3 = 1 + \dim Im T$
$\Rightarrow \dim Im T = 2 \neq 4 = \dim P_3(\mathbb{R})$,

logo T não é sobrejetora.

—————— // ——————

Questão 3:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x+2y, y)$

$T(1,0) = (2,0)$
$T(0,1) = (2,1)$
$\Rightarrow [T] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$p_T(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)$

- Autovalores:

$p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2$ e $\lambda = 1$.

- $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

Autovetores: $(x, 0)$; $x \neq 0$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

Autovetores: $(-2y, y)$, $y \neq 0$

$\alpha = \{(1,0), (-2,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. Portanto, T é diagonalizável e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

——— // ———

b) $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda I_3)$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) - 4 - 2 + (3-\lambda) + 4(2-\lambda) - 2(-2-\lambda)$

$= (2-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) + 9 - 3\lambda$

$= (3-\lambda)((2-\lambda)(-2-\lambda) + 3)$

$= (3-\lambda)(-4 + \lambda^2 + 3)$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$

Autovalores: $p_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3, \lambda = -1, \lambda = 1$

- $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_1}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -3z}$$

$$x = y + z \Rightarrow x = -3z + z$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -2z}$$

Autovetores: $(-2z, -3z, z),\ z \neq 0$

- $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 4L_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -10x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{y = -z}$$

Autovetores: $(0, -z, z),\ z \neq 0$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -y}$$

Autovetores: $(-y, y, 0),\ y \neq 0$

$\alpha = \{(-2,-3,1),(0,-1,1),(-1,1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Portanto T é diagonalizável e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—— // ——

c) $T(x,y,z) = (x,-z,y)$

$T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (0,0,1)$

$T(0,0,1) = (0,-1,0)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Autovalores (reais)

$p_T(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

- $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$-2z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 0$

Autovetores: $(x, 0, 0), x \neq 0$

T não é diagonalizável, pois T não possui base formada por autovetores.

—— // ——