UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 2: Matrizes - Parte I

Ementa: Definição, ordem, notação e exemplos de matrizes; tipos especiais de matrizes (matrizes quadrada, nula, linha, coluna, diagonal, identidade, triangular, simétrica e antissimétrica); adição de matrizes e propriedades; multiplicação por escalar e propriedades.
Objetivos: Assimilar o conceito de matrizes e suas principais propriedades. Compreender que o conjunto das matrizes é um exemplo de espaço vetorial.

Dados dois números inteiros positivos m e n, chamamos **matriz de ordem** $m \times n$ (lê-se "matriz m por n") uma tabela formada por $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas. Indicamos um elemento da linha i e coluna j por a_{ij}. Dessa forma, a matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$ pode ser denotada por $\mathbf{A}_{m\times n}$ ou $(a_{ij})_{m\times n}$ ou simplesmente (a_{ij}).

Exemplo 1 *Abaixo vemos um exemplo de uma matriz arbitrária* $\mathbf{A}$ *de ordem* $m \times n$ *e outra matriz* $\boldsymbol{B}$ *de ordem* 3×5*:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 25 & -3 \\ 26 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 4 & -100 & 8 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

1 Tipos especiais de matrizes

- **Matriz quadrada:** é toda matriz em que o número de linhas é igual o número de colunas, isto é, $m = n$. Neste caso dizemos que a matriz tem ordem n.

  Exemplo: Abaixo temos uma matriz quadrada $\mathbf{C}$ de ordem 3

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz nula:** é toda matriz tal que todas as suas entradas são nulas, isto é $a_{ij} = 0$ para todos i, j. A indicamos por $0_{m \times n}$.

  Exemplos:

$$\mathbf{0_{2\times 2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0_{3\times 3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz coluna:** é toda matriz que possui uma única coluna

  Exemplos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{4\times 1} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

- **Matriz linha:** é toda matriz que possui uma única linha

  Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 4} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

  Exemplo:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz identidade:** é uma matriz quadrada e diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$. A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n.

  Exemplos:

$$\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Exemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

  Exemplos:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz simétrica:** é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$, para todos i, j.

  Exemplos:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz antissimétrica:** é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = -a_{ji}$, para todos i, j.

  Exemplo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2 Operações com matrizes

2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, chamamos de **soma** das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 2 *Dadas as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *abaixo, vamos determinar* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Solução:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

2.2 Multiplicação por escalar

Dados uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, chamamos de **multiplicação de A pelo escalar** k a matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, onde $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Exemplo 3 *Dada a matriz* $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -1 & 10 & 20 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$. *Vamos determinar* $5{\cdot}\mathbf{C}$.

Solução:

$$\mathbf{5}\cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -1 & 10 & 20 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -35 & 25 \\ -5 & 50 & 100 \\ 30 & 20 & 15 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2.3 Propriedades

Dadas as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ de ordem $m \times n$ e os números reais a, b, as seguintes propiedades envolvendo adição de matrizes e multiplicação por escalar são satisfeitas:

(A1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (associatividade);

(A2) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ (comutatividade);

(A3) $\mathbf{A} + 0_{m\times n} = \mathbf{A}$ (elemento neutro);

(A4) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0_{m\times n}$ (elemento oposto);

(ME1) $a\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\cdot\mathbf{A} + a\cdot\mathbf{B}$;

(ME2) $(a+b)\cdot\mathbf{A} = a\cdot\mathbf{A} + b\cdot\mathbf{A}$;

(ME3) $(a\cdot b)\cdot\mathbf{A} = a\cdot(b\cdot\mathbf{A})$;

(ME4) $1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$;

(ME5) $0\cdot\mathbf{A} = 0_{m\times n}$.

3 Exercícios

(1) Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -8 & 20 & 10 \\ 6 & 20 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determine:

(a) A ordem de **A**;

(b) Os elementos a_{23}, a_{42}, a_{32} e a_{24};

(c) A matriz **A** pode ser classificada como algum tipo especial de matriz? Se a resposta for sim, qual seria essa classificação?

(2) Classifique as matrizes abaixo em algum dos tipos de matrizes especiais vistos:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 70 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -13 \\ 25 \\ 32 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 87 \\ -87 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Determine em cada um dos casos abaixo, $x, y,$ e z números reais tais que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam simétricas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & x \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & x+2 & 5 \\ 8 & 20 & y-35 \\ z+1 & 7z & -14 \end{pmatrix}$

(4) Considere as matrizes $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ com respectivas ordens,$4 \times 4, 3 \times 4, 4 \times 3, 4 \times 4, 3 \times 4$. Determine quais das serguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$;

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{D}$;

(c) $\mathbf{B} + \mathbf{C}$;

(d) $\mathbf{B} + \mathbf{E}$

(5) Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 80 & 200 & 95 \\ -59 & 28 & 32 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 61 \\ 79 & 25 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 13 & 66 & 129 \\ 79 & 25 & 3 \end{pmatrix}$$

Quando possível, calcule o que se pede.

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{B} + \mathbf{D}$

(d) $\mathbf{D} + 0_{2\times 3}$

(6) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 165 & 198 & -64 & 964 \\ 81 & -9 & 16 & 25 \\ -42 & 54 & 345 & -54 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 254 & -19 & 46 & 469 \\ -18 & 23 & 387 & 426 \\ 4259 & 22 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 2B$.

(7) Determine a, b e c, para que se tenha $\mathbf{0_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 \\ a+3c & -b \\ -2b & 0 \end{pmatrix}$.

(8) Determine $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ para que se tenha $\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

(9) Sendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{X}$ que verifica a igualdade $3(\mathbf{X} + \mathbf{A}) = 2(\mathbf{B} + \mathbf{X}) + 5\mathbf{C}$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.