



Prova 3 (segunda chamada) - 31/01/2023

Nome: _____ Matrícula: _____

Questão 1: Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação dada por $T(x, y, z) = (z, 0)$.

- (a) (1,0 ponto) Mostre que T é uma transformação linear.
- (b) (1,0 ponto) Determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$, onde $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0), (0, 2)\}$ são bases de \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Questão 2: Considere $P_1(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de grau no máximo um com uma variável real e a aplicação $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(ax + b) = (b, a)$.

- (a) (1,0 ponto) Mostre que T é uma transformação linear.
- (b) (0,5 pontos) Determine $[T]$.
- (b) (0,5 pontos) Determine o núcleo de T .
- (c) (1,5 pontos) T é um isomorfismo? Se sim, determine T^{-1} e $[T^{-1}]$.

Questão 3: Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) (1,5 pontos) Determine, caso existam, os autovalores e os autovetores de T .
- (b) (1,0 pontos) T é diagonalizável? Se sim, exiba uma base α de \mathbb{R}^3 formada por autovetores e $[T]_{\alpha}^{\alpha}$.

Questão 4: (2,0 pontos) Assinale (V) para as afirmações verdadeiras e (F) para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

- (a) () Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ injetora.
- (b) () O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (-y, 5x + 6y)$ é diagonalizável.
- (c) () Existe pelo menos uma transformação linear bijetora $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ e portanto, $M_2(\mathbb{R}) \simeq P_3(\mathbb{R})$.
- (d) () Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Se $\dim U > \dim V$, então T não é injetora.

Questão extra:

- (a) (0,5 pontos) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$.
- (b) (0,5 pontos) Dê um exemplo de uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$.
- (c) (0,5 pontos) Dê um exemplo de uma transformação linear sobrejetora $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$.
- (d) (0,5 pontos) Enuncie o Teorema do Núcleo e da Imagem.
- (e) (0,5 pontos) O que significa dizer que um operador linear é diagonalizável?