UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 6: Subespaços vetoriais - Parte I

Ementa: Definição e exemplos de subespaços vetorias; subespaços vetoriais triviais.
Objetivos: Saber verificar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial.

Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um **subespaço vetorial** de V ou simplesmente um **subespaço** de V, se W, com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares, é um espaço vetorial.

Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Como os elementos de W estão em V, que já é um espaço vetorial, para verificarmos se W é subespaço vetorial de V basta verificarmos os seguintes itens:

(i) $W \neq \emptyset$;

(ii) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

(iii) se $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $au \in W$.

Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ admite pelo menos dois subespaços: o subespaço nulo e o próprio espaço vetorial V. Estes dois são os chamados **subespaços triviais** de V. Os demais subespaços são chamados **subespaços próprios** de V.

1 Exemplos

Exemplo 1 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Verifique se S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.*

Solução: Verifiquemos se S satisfaz as condições vistas acima:

(i) É claro que $(0, 0, 0)$ satisfaz $0 + 0 + 0 = 0$, logo $S \neq \emptyset$.

(ii) Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S$, tais que $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$ então $\vec{u} + \vec{v} = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$ e assim, $(x + a) + (y + b) + (z + c) = (x + y + z) + (a + b + c) = 0$. Portanto, $\vec{u} + \vec{v} \in S$.

(iii) Seja $\vec{u} = (x, y, z) \in S$, então $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, e daí $(\alpha x + \alpha y + \alpha z) = \alpha(x + y + z) = \alpha 0 = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, $\alpha\vec{u} \in S$.

Concluímos então que S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemplo 2 *Dado* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$*. Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*.*

Solução: Seja $\vec{u} = (2, 1) \in W$ e note que, a condição (iii) não é satisfeita, já que $-1\vec{u} = -1 \cdot (2, 1) = (-2, -1) \notin W$.

Portanto, W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 3 *Dado* $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : c = 0 \text{ e } d = a + b \right\}$*. Verifique se* A *é subespaço vetorial de* M_2*.*

Solução: Verifiquemos se A satisfaz as condições vistas acima:
Sejam $X, Y \in A$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$.

(i) $0 \in A$, pois $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, lembrando que $d = a+b$ como $a = 0$ *e* $b = 0$, logo $d = 0+0 = 0$.

(ii) $X + Y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 + 0 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \end{bmatrix}$, logo $X + Y \in A$.

(iii) $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha 0 & \alpha(a_1 + b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 0 & \alpha a_1 + \alpha b_1 \end{bmatrix}$. Logo, $\alpha X \in A$.

Como todas as condições foram verificadas concluímos que A é subespaço vetorial de M_2. ■

Exemplo 4 *Dado* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 1\}$*. Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$*.*

Solução: Vamos verificar se valem as propriedades de subespaço para W.

Note que $\vec{0} \notin W$, pois o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz a condição de V, ou seja, que $x - y - 3z = 1$, substituindo $x = y = z = 0$ temos $0 - 0 - 3.0 \neq 1$.
Daí $0 \cdot \vec{u} = 0 \notin W$ para todo $\vec{u} \in W$ e então (iii) não é satisfeita. Com isso, concluímos que W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemplo 5 *Dado* $V = \{(x, -x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. *Verifique se* V *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$.

Solução: Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para V.
Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (x_1, -x_1, y_1, z_1)$ *e* $\vec{v} = (x_2, -x_2, y_2, z_2)$.

(i) $\vec{0} \in V$, pois $(0, -0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, -x_1, y_1, z_1) + (x_2, -x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, -x_1 + (-x_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$= (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

(iii) $\alpha\vec{u} = \alpha(x_1, -x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, -\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$. Portando, $\alpha\vec{u} \in V$.

Como todas as condições foram verificadas concluímos que V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
■

2 Exercícios

Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais.

(1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \ e \ z = 5y\} \subset \mathbb{R}^3$.

(2) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0 \ e \ z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

(3) $W = \{A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{(m,n)} : a_{11} \leq 0\} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \ e \ b = c + 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(5) $A = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{12} = a_{21}\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(6) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$.

(7) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 4\} \subset \mathbb{R}^3$.

(8) $W = \{$ o subconjunto das matrizes triangulares superiores de ordem $3\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

(9) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\} \subset \mathbb{R}^3$.

(10) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.