UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 2: Matrizes e sistemas lineares

(1) Mostre que o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $m\times n$ com entradas reais, com a operação usual de adição e a multiplicação por escalar usual é um espaço vetorial real.

(2) Determine os valores de x, y e z em $\mathbb{R}$ para que as matrizes A e B dadas sejam iguais:

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ z & x-2y \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) $A+B$;

(b) $-2C$;

(c) AC;

(d) CD;

(e) BC;

(f) DA.

(4) Considere as matrizes

$$A = [a_{ij}]_{4\times 5}, \quad \text{com} \quad a_{ij} = i - j;$$
$$B = [b_{ij}]_{5\times 9}, \quad \text{com} \quad b_{ij} = j;$$
$$C = [c_{ij}], \quad \text{com} \quad C = AB.$$

(a) É possível determinar c_{63}? Justifique.

(b) Determine c_{36}.

(5) Dada uma matriz A, dizemos que uma matrix X **comuta** com A se $AX = XA$. Determine todas as matrizes que comutam com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6) Uma matriz quadrada A será dita **nilpotente** se existir um número natural n tal que $A^n = 0$. E o menor número natural n tal que $A^n = 0$ será chamado de **ordem de nilpotência** de A. Determine todas as matrizes nilpotentes de ordem 2 com ordem de nilpotência 2.

(7) Em $\mathbb{R}^3$, se tivermos um sistema linear com três equações, quais seriam as possibilidades de interpretações geométricas para este sistema e qual seria a consequência na resolução do sistema para cada possibilidade?

(8) (a) Obtenha A^t, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Mostre que $(A+B)^t = A^t + B^t$ e $(kA^t) = kA^t$, onde A e B são matrizes quaisquer de mesma ordem e $k \in \mathbb{R}$.

(c) Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $n \times p$, prove que $(AB)^t = B^t A^t$.

(d) Mostre que $(A^t)^t = A$ para toda matriz A.

(9) Mostre que se B é uma matriz quadrada, então:

(a) $B + B^t$ e BB^t são simétricas;

(b) $B - B^t$ é antissimétrica.

(10) Mostre que toda matriz quadrada se escreve como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz antissimétrica.

(11) Mostre que uma matriz A é inversível se, e somente se, A^t é inversível. Conclua que as operações de inversão e transposição comutam, isto é, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, quando A é inversível.

(12) Mostre que se A e B são matrizes inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(13) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Obtenha a forma escalonada de A.

(b) A é inversível? Justifique e caso seja inversível, determine A^{-1}.

(14) Determine a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas:

(a) $A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(15) O **traço** de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é simbolizado por $tr(A)$. Mostre que, se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

(16) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique sua escolha utilizando demonstrações ou contra-exemplos.

(a) ( ) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2.$$

(b) ( ) Se A, B e C são matrizes quadradas de mesma ordem e A diferente da matriz nula, vale que

$$AB = AC \Rightarrow B = C.$$

(c) ( ) $tr(A^tA) = tr(AA^t)$.

(d) ( ) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, ambas compostas por inteiros positivos. Se os elementos de A forem todos pares, então os elementos de AB e de BA serão todos pares.

(e) ( ) Se $A^k = 0$ para todo $k \geq 2$, então $A = 0$.