UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°. *Victor Martins***

Lista 5: Corpos e espaços vetoriais

(1) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo então para todo $a \in \mathbb{K}$ tem-se $a \cdot 0 = 0$.

(2) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, o elemento neutro da adição em $\mathbb{K}$ é único.

(3) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, os elementos simétricos aditivo e multiplicativo (se existir) são únicos para cada elemento do corpo.

(4) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

(5) Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a+b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ não é um corpo, com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais.

(6) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Mostre que se $u+v = u+w$ então $v = w$.

(7) Mostre que se $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as mesmas operações de soma e produto definidas em $\mathbb{K}$.

(8) Descreva o vetor nulo de cada um dos espaços vetoriais abaixo (nos quais são consideradas as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação por escalar):

   (a) $\mathbb{R}^2$
   (b) $\mathbb{R}^3$
   (c) $\mathbb{R}^n$
   (d) $\mathbb{C}^n$
   (e) $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$
   (f) $P(\mathbb{R})$ (polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$)
   (g) $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

(9) Em cada item abaixo são definidas em $\mathbb{R}^2$ operações de adição de vetores e multiplicação por escalar com as quais $\mathbb{R}^2$ não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Mostre (através de contra exemplos), em cada caso, quais as propriedades de espaços vetoriais não são atendidas pelas operações dadas:

(a)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 2y_1 + 2y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

(b)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha y_1, \alpha x_1)$$

(c)

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (0, \alpha y_1)$$

(10) Verifique se é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais tais que $x > 0$ e $y > 0$, com as operações definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(11) Seja $V = \{(1, x, 2) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ munido das operações

$$(1, x_1, 2) + (1, x_2, 2) = (1, x_1 + x_2, 2)$$

$$\alpha(1, x, 2) = (1, \alpha x, 2), \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e obtenha o vetor nulo de V.

(12) Verifique quais conjuntos de vetores abaixo são espaços vetoriais reais. Para aqueles que não forem, citar as propriedades que não se verificam.

(a) $A = \{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$ com as operações usuais

(13) Sejam U e W dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Considere o produto cartesiano $V = U \times W$ desses dois conjuntos. Defina as seguintes operações em V:

$$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2) \quad \text{e} \quad a(u_1, w_1) = (au_1, aw_1),$$

onde $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $a \in \mathbb{K}$. Mostre que V com as operações de adição e de multiplicação por escalar, acima definidas, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Este espaço veotiral é chamado de **espaço produto** de U por W.