UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 1: Espaço vetorial real

Ementa: Definição e exemplos de espaços vetoriais reais
Objetivos: Aprender a verificar se um dado conjunto é ou não um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Caso não seja, saber indicar as propriedades de espaço vetorial que não são satisfeitas pelo conjunto dado.

Um conjunto não vazio V será dito um **espaço vetorial real** (ou um $\mathbb{R}$ **- espaço vetorial**) se estiverem definidas uma adição em V e uma multiplicação por escalar de $\mathbb{R}$ em V:

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u,v) & \mapsto & u+v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (a,v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

satisfazendo:

(A1) A adição é associativa, isto é,

$$(u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall\ u,v,w \in V.$$

(A2) A adição é comutativa, isto é,

$$u+v = v+u, \quad \forall\ u,v \in V.$$

(A3) A adição possui **elemento neutro**, ou seja, existe $0 \in V$, tal que, dado $u \in V$, $u + 0 = u$.

(A4) A adição possui **elementos simétricos**, ou seja, para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que

$$u + (-u) = 0.$$

(ME1) $a(u+v) = au + av, \quad \forall\ a \in \mathbb{R},\ u,v \in V.$

(ME2) $(a+b)u = au + bu, \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME3) $(a \cdot b)u = a(bu), \quad \forall\ a,b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME4) $1 \cdot u = u, \quad \forall\ u \in V.$

Os elementos de V serão chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{R}$ de **escalares**. O elemento $0 \in V$ será chamado de **vetor nulo** e o elemento $-v \in V$ de **vetor oposto** de v.

1 Propriedades dos espaços vetoriais

Segue da definição de um espaço vetorial V, as seguintes propriedades:

- O elemento neutro da adição em V é único;
- Dado um vetor $v \in V$, o simétrico $-v$ de v é único;
- O simétrico de $-v \in V$ é v, isto é, $-(-v) = v$;
- Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$;
- Para todo $v \in V$, $0 \cdot v = 0 \in V$;
- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e tomando o elemento neutro $0 \in V$, $\alpha \cdot 0 = 0 \in V$;
- Se $\alpha \cdot v = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, então $\alpha = 0$ ou $v = 0$;
- Para todo $v \in V$, $(-1) \cdot v = -v$.

2 Exemplos

Exemplo 1 *Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$ com as operações de adição e multiplicação usuais de $\mathbb{R}^2$. Vamos verificar que V é espaço vetorial real.*

Para verificarmos se V é espaço vetorial real, temos que verificar se as condições vistas acima são válidas. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, 5x_1)$, $\vec{v} = (x_2, 5x_2)$ e $\vec{w} = (x_3, 5x_3)$.

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(x_1, 5x_1) + (x_2, 5x_2)] + (x_3, 5x_3) = (x_1 + x_2, 5x_1 + 5x_2) + (x_3, 5x_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3, 5x_1 + 5x_2 + 5x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 5(x_1 + x_2 + x_3))$.

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, 5x_1) + [(x_2, 5x_2) + (x_3, 5x_3)] = (x_1, 5x_1) + (x_2 + x_3, 5x_2 + 5x_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3, 5x_1 + 5x_2 + 5x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 5(x_1 + x_2 + x_3))$.

$\therefore (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(A2) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, 5x_1) + (x_2, 5x_2) = (x_1 + x_2, 5x_1 + 5x_2) = (x_1 + x_2, 5(x_1 + x_2))$
$= (x_2 + x_1, 5(x_2 + x_1)) = (x_2 + x_1, 5x_2 + 5x_1) = (x_2, 5x_2) + (x_1, 5x_1) = \vec{v} + \vec{u}$

(A3) $0 \in V$, *pois* $\vec{0} = (0, 5.0) = (0, 0)$.
$\vec{u} + 0 = (x_1, 5x_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, 5x_1 + 0) = (x_1 + 0, 5(x_1 + 0)) = (x_1, 5x_1) = \vec{u}$

(A4) *Dado* $\vec{u} = (x_1, 5x_1)$, *existe* $(-\vec{u}) = (-x_1, -5x_1)$ *tal que:*
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, 5x_1) + (-x_1, -5x_1) = (x_1, 5x_1) - (x_1, 5x_1) = (x_1 - x_1, 5x_1 - 5x_1) = (x_1 - x_1, 5(x_1 - x_1)) = (0, 5.0) = (0, 0) = \vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha[(x_1,5x_1)+(x_2,5x_2)] = \alpha(x_1+x_2,5x_1+5x_2) = \alpha(x_1+x_2,5(x_1+x_2))$
$= (\alpha(x_1+x_2), \alpha 5(x_1+x_2)) = (\alpha x_1+\alpha x_2, 5\alpha x_1+5\alpha x_2)) = (\alpha x_1, 5\alpha x_1)+(\alpha x_2, 5\alpha x_2)$
$= \alpha(x_1,5x_1)+\alpha(x_2,5x_2) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha+\beta)\vec{u} = (\alpha+\beta)(x_1,5x_1) = ((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)5x_1) = ((\alpha+\beta)x_1, 5(\alpha+\beta)x_1)$
$= (\alpha x_1+\beta x_1, 5\alpha x_1+5\beta x_1) = (\alpha x_1,5\alpha x_1)+(\beta x_1,5\beta x_1) = \alpha(x_1,5x_1)+\beta(x_1,5x_1)$
$= \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(x_1,5x_1) = ((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)5x_1) = ((\alpha\beta)x_1,5(\alpha\beta)x_1) = (\alpha\beta x_1, 5\alpha\beta x_1)$
$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(x_1,5x_1)) = \alpha(\beta x_1, \beta 5x_1) = \alpha(\beta x_1,5\beta x_1) = (\alpha\beta x_1, \alpha 5\beta x_1) = (\alpha\beta x_1, 5\alpha\beta x_1)$

$\therefore (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

(ME4) $1.\vec{u} = 1.(x_1,5x_1) = (1.x_1, 1.5x_1) = (x_1,5x_1) = \vec{u}$

Como todas as propriedades são válidas, concluímos que V é espaço vetorial real.

Exemplo 2 *Seja $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:*
Dados $\vec{u} = (x_1,y_1)$ e $\vec{v} = (x_2,y_2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, defina:

- $\vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
- $a\vec{u} = (ax_1, y_1)$

V com as operações definidas acima não é um espaço vetorial. De fato, dados $\vec{u} = (1,1) \in V$ e os escalares reais 2 e -2, temos que a propriedade $(ME2)$ não é satisfeita, já que

$$(2+(-2))\vec{u} = 0\cdot(1,1) = (0,1)$$

é diferente de

$$2\cdot\vec{u}+(-2)\cdot\vec{u} = 2(1,1)+(-2)(1,1) = (2,1)+(-2,1) = (0,2).$$

Exemplo 3 *Seja $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, W é espaço vetorial real?*

Note que a condição (A4) não é satisfeita, já que, por exemplo, dado $\vec{u} = (7,-1) \in W$, temos que se existir $\vec{v} = (x,y) \in W$ tal que $\vec{u}+\vec{v} = 0$, deveríamos ter

$$0 = \vec{u}+\vec{v} = (7,-1)+(x,y) \;\Rightarrow\; x = -7, y = 1,$$

mas $\vec{v} = (-7,1) \notin W$. Desta forma W não é um espaço vetorial real.

Exemplo 4 *Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ com as operações de adição e multiplicação usuais de $\mathbb{R}^3$.*

Vamos verificar se valem as condições para V ser espaço vetorial.
Sejam $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w} \in V$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1,2x_1,3x_1), \vec{v} = (x_2,2x_2,3x_2)$ e $\vec{w} = (x_3,2x_3,3x_3)$.

(A1) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = [(x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2, 2x_2, 3x_2)]+(x_3, 2x_3, 3x_3) = (x_1+x_2, 2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2)+(x_3, 2x_3, 3x_3) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1+2x_2+2x_3, 3x_1+3x_2+3x_3) = (x_1+x_2+x_3, 2(x_1+x_2+x_3), 3(x_1+x_2+x_3))$

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (x_1, 2x_1, 3x_1)+[(x_2, 2x_2, 3x_2)+(x_3, 2x_3, 3x_3)] = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2+x_3, 2x_2+2x_3, 3x_2+3x_3) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1+2x_2+2x_3, 3x_1+3x_2+3x_3) = (x_1+x_2+x_3, 2(x_1+x_2+x_3), 3(x_1+x_2+x_3))$
$\therefore (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(A2) $\vec{u}+\vec{v} = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1+x_2, 2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2) = (x_1+x_2, 2(x_1+x_2), 3(x_1+x_2))$
$\vec{v}+\vec{u} = (x_2, 2x_2, 3x_2)+(x_1, 2x_1, 3x_1) = (x_2+x_1, 2x_2+2x_1, 3x_2+3x_1) = (x_2+x_1, 2(x_2+x_1), 3(x_2+x_1)) = (x_1+x_2, 2(x_1+x_2), 3(x_1+x_2))$
$\therefore \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

(A3) $\vec{0} \in V$ *e* $\vec{u}+\vec{0} = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(0,0,0) = (x_1+0, 2x_1+0, 3x_1+0) = (x_1, 2x_1, 3x_1) = \vec{u}$

(A4) *Dado* $\vec{u} \in V$*, existe* $-\vec{u} = (-x_1, -2x_1, -3x_1) \in V$ *tal que* $\vec{u}+(-\vec{u}) = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(-x_1, -2x_1, -3x_1) = (x_1, 2x_1, 3x_1)-(x_1, 2x_1, 3x_1) = (x_1-x_1, 2x_1-2x_1, 3x_1-3x_1) = (x_1-x_1, 2(x_1-x_1), 3(x_1-x_1)) = (0, 2.0, 3.0) = (0,0,0) = \vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha[(x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2, 2x_2, 3x_2)] = \alpha(x_1+x_2, 2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2) = \alpha(x_1+x_2, 2(x_1+x_2), 3(x_1+x_2)) = (\alpha(x_1+x_2), 2\alpha(x_1+x_2), 3\alpha(x_1+x_2))$
$= (\alpha x_1+\alpha x_2, 2\alpha x_1+2\alpha x_2, 3\alpha x_1+3\alpha x_2) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1, 3\alpha x_1)+(\alpha x_2, 2\alpha x_2, 3\alpha x_2)$
$= \alpha(x_1, 2x_1, 3x_1)+\alpha(x_2, 2x_2, 3x_2) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha+\beta)\vec{u} = (\alpha+\beta)(x_1, 2x_1, 3x_1) = ((\alpha+\beta)x_1, 2(\alpha+\beta)x_1, 3(\alpha+\beta)x_1)$
$= (\alpha x_1+\beta x_1, 2\alpha x_1+2\beta x_1, 3\alpha x_1+3\beta x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1, 3\alpha x_1)+(\beta x_1, 2\beta x_1, 3\beta x_1)$
$= \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(x_1, 2x_1, 3x_1) = ((\alpha\beta)x_1, 2(\alpha\beta)x_1, 3(\alpha\beta)x_1) = (\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_1, 3\alpha\beta x_1)$
$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(x_1, 2x_1, 3x_1)) = \alpha(\beta x_1, 2\beta x_1, 3\beta x_1) = (\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_1, 3\alpha\beta x_1)$
$\therefore (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$.

(ME4) $1.\vec{u} = 1(x_1, 2x_1, 3x_1) = (1.x_1, 1.2x_1, 1.3x_1) = (x_1, 2x_1, 3x_1) = \vec{u}$

Como todas condições valem, V é espaço vetorial.

Exemplo 5 *Seja $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação definidas como segue: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1)$
- $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0)$

Observe que V com essas operações não é um espaço vetorial. De fato, dados $\vec{u} = (1,2), \vec{v} = (3,-1) \in V$ a condição (A2) não é satisfeita, já que

$$\vec{u}+\vec{v} = (1,2)+(3,-1) = (1+3,2) = (4,2)$$

que é diferente de

$$\vec{v}+\vec{u}=(3,-1)+(1,2)=(3+1,-1)=(4,-1).$$

Exemplo 6 *Seja* $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad e \quad a+d=0\right\}$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais em matrizes. Verifique se* V *é espaço vetorial.*

Vamos verificar se valem as condições para V *ser espaço vetorial.*

Sejam A, B *e* $C \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Como* $a+d=0$ *então* $d=-a$ *e assim,* $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}$ *e* $C=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$.

(A1) $(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -a_1+(-a_2) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & -a_1+(-a_2)+(-a_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & -(a_1+a_2+a_3) \end{bmatrix}.$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ c_2+c_3 & -a_2+(-a_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & -a_1+(-a_2)+(-a_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & -(a_1+a_2+a_3) \end{bmatrix}.$$

$\therefore (A+B)+C=A+(B+C).$

(A2) $A+B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -a_1+(-a_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{bmatrix}$

$$B+A=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & -a_2+(-a_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ c_2+c_1 & -(a_2+a_1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & -(a_1+a_2) \end{bmatrix}.$$

$\therefore A+B=B+A.$

(A3) $0 \in V$.

$$A+0=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+0 & b_1+0 \\ c_1+0 & -a_1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

(A4) Dado $A \in V$, existe $-A \in V$ tal que

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) & b_1 + (-b_1) \\ c_1 + (-c_1) & -a_1 + (-(-a_1)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) & b_1 + (-b_1) \\ c_1 + (-c_1) & -a_1 + a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_1 & b_1 - b_1 \\ c_1 - c_1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ME1) $\alpha(A + B) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(b_1 + b_2) \\ \alpha(c_1 + c_2) & \alpha(-(a_1 + a_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & \alpha b_1 + \alpha b_2 \\ \alpha c_1 + \alpha c_2 & -\alpha a_1 + (-\alpha a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \alpha c_2 & -\alpha a_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

(ME2) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)a_1 & (\alpha + \beta)b_1 \\ (\alpha + \beta)c_1 & -(\alpha + \beta)a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 & \alpha b_1 + \beta b_1 \\ \alpha c_1 + \beta c_1 & -\alpha a_1 + (-\beta a_1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta b_1 \\ \beta c_1 & -\beta a_1 \end{bmatrix} = \alpha A + \beta A.$$

(ME3) $(\alpha\beta)A = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_1 & (\alpha\beta)b_1 \\ (\alpha\beta)c_1 & -(\alpha\beta)a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & \alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta c_1 & -\alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$

$$\alpha(\beta A) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta b_1 \\ \beta c_1 & -\beta a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & \alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta c_1 & -\alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$

(ME4) $1.A = 1. \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.a_1 & 1.b_1 \\ 1.c_1 & 1.(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = A.$

Como todas condições são válidas, V é espaço vetorial.

Exemplo 7 *Seja* $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad e \quad ad - bc = 0 \right\}$. *Observe que V não é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar. De fato, sejam $A, B \in V$, com* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Note que $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e $A + B \notin V$, pois*

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ *com isso, $a.d \neq b.c$*

3 Exercícios

Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais.

(1) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^3$.

(2) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - w = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(3) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(4) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, com as operações usuais de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

(5) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$.
Multiplicação: $\alpha(x,y) = (\alpha x, y^\alpha)$.

(6) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$.
Multiplicação: $\alpha(x,y) = (3\alpha x, -\alpha x)$.

(7) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = x, z = w^2\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(8) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
Multiplicação: $\alpha(x,y) = (\alpha^2 x, \alpha^2)$.

(9) $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, com as operações usuais de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

(10) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$.
Multiplicação: $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.