UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde

Disciplina: ***Álgebra Linear*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 8: Transformações lineares

(1) Verifique se cada uma das aplicações abaixo é uma transformação linear:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x \cdot y$

(c) $h : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada por $h(A) = detA$

(d) $L : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $L(A) = tr(A)$

(e) $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $U(x, y, z) = (x^2 - 3y, 5z, 0)$

(f) $M : P_2(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$ dada por $M(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

(g) $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $S(x, y, z, w) = (y, z - w, 2y + z + 2w)$

(h) $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $N(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $R(x, y) = (x, 2^y - 2^x)$

(j) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = |x|$

(k) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = x - 2y + 3$

(l) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (1 + x, y)$

(m) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y & x + y + z \\ x + y - z & 2y - 3z \end{pmatrix}$

(n) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a, b, c) = a + bx + cx^2$

(o) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (xy, x)$

(2) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in V$ tal que $T(u) = 0$ (vetor nulo de W), podemos concluir então que $u = 0$ (vetor nulo de V)? Justifique se for verdade ou apresente um contra-exemplo se for falso.

(3) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Obtenha $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

(4) Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$? Obtenha $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

(5) Qual a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $S(1,1,1) = 3$, $S(0,1,-2) = 1$ e $S(0,0,1) = -2$?

(6) Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por $A(x,y) = (5x+4y, -3x-2y)$. Para quais valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ existem vetores não nulos $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $A(u) = \lambda \cdot u$? Esses vetores u são únicos para cada λ fixado? Determine esses vetores. O que vocÊ pode concluir dos vetores "associados" a cada λ?

(7) Obtenha o núcleo, a imagem e suas respectivas dimensões para cada uma das aplicações do Exercício 1 que forem transformações lineares. Verifique o Teorema do Núcleo e da Imagem em cada caso.

(8) Obtenha o núcleo e a imagem da transformação linear derivação $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dado por $D(p(x)) = p'(x)$.

(9) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$. Determine uma base do núcleo de T. Qual a dimensão da imagem de T? A imagem de T é todo o $\mathbb{R}^3$? Justifique.

(10) Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ cuja imagem é todo $\mathbb{R}^5$? Justifique e tente generalizar cada resultado.

(11) Pode existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = \{(0,0,0)\}$? Justifique e tente generalizar cada resultado.

(12) Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Mostre que $B' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ gera a $Im(T)$, ou seja, qualquer vetor da imagem de T é uma combinação linear dos vetores de B'.

(13) Descreva explicitamente uma transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que sua imagem seja o espaço gerado pelos vetores $u = (2i, 1, -3)$ e $v = (0, -i, 1+i)$.

(14) Descreva explicitamente uma transformação linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$ e cuja imagem seja a reta $y = 3x$.

(15) Verifique quais das transformações lineares do Exercício 1 são injetoras e quais são sobrejetoras.

(16) Dados $T : U \to V$ transformação linear injetora e $u_1, u_2, \ldots u_k$ vetores LI em U, mostre que o conjunto $\{T(u_1, T(u_2), \ldots, T(u_k)\}$ é LI.

(17) Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares satisfazendo as condições dos itens abaixo. Quando não for possível, justifique.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora.

(b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $N(S) = \{(0,0,0)\}$.

(c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Im(L) = \{(0,0)\}$.

(d) $M : M_2(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{R})$ isomorfismo.

(e) $H : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ isomorfismo.

(18) Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, determine T^{-1}.

(19) Seja $P : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear tal que $P(1, 0, 0) = (1, 0, i)$, $P(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $P(0, 0, 1) = (i, 0, 1)$. Verifique se P é um isomorfismo.

(20) Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(p(x)) = (p(0), p(1))$. Mostre que T é injetiva.

(21) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear para a qual existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) \neq 0$, determine $dimN(T)$.