Lucas Drummond de Andrade

Grafos na educação básica: uma inserção possível e necessária

Alegre - ES

Março de 2021

Lucas Drummond de Andrade

Grafos na educação básica: uma inserção possível e necessária

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins

Alegre - ES

Março de 2021

Lucas Drummond de Andrade

Grafos na educação básica: uma inserção possível e necessária

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Trabalho aprovado. Alegre - ES, 11 de março de 2021:

Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins (Orientador)
(DMPA/CCENS - UFES)

Profª. Dra. Raisa Maria de Arruda Martins
(DMVET/UFES)

Profª. Dra. Marli Regina dos Santos
(DEEMA/UFOP)

Alegre - ES
Março de 2021

Agradecimentos

Queria agradecer primeiramente à minha família que conseguiu, com muita dedicação, me propiciar uma base para que eu pudesse focar totalmente na minha faculdade, confiando quase que sem cobranças que eu iria aproveitar todo tempo e recursos investidos da maneira correta. Recursos esses vindos também da CAPES, que foram fundamentais.

Agradecer também a todos que passaram pela minha vida nesse tempo de graduação, tanto professores quanto alunos, principalmente os dois restantes da minha turma original, Bruno e Betânia, que sem eles talvez a vontade de desistir teria falado mais alto do que a vontade de me formar.

Mas meu agradecimento principal é ao meu orientador, Victor Martins, que além de fazer desse trabalho algo possível (com muita paciência), foi quem me fez enxergar um futuro que jamais imaginaria enxergar. Com conversas que me fizeram descobrir o amor que eu tinha pela área da educação, e que me deu, e dá, muitas forças para seguir uma carreira na área.

Enfim, a todos que me ajudaram e acreditaram em mim, meu muito obrigado!

"Quem tem um amigo (tem tudo)"

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo, vista a ausência do conteúdo de teoria dos grafos nos currículos tanto da educação básica quanto dos cursos de licenciatura em matemática, fazer uma reflexão sobre a sua possível inserção na educação básica e apresentar uma proposta com enfoque na resolução de problemas, passível de ser desenvolvida junto à alunos e discutida à futuros professores de Matemática. Para isso, foram apresentadas a situação do ensino da teoria dos grafos tanto no ensino básico quanto no ensino superior e justificativas para a inserção do tópico nos currículos. Dentre essas justificativas foram citadas tendências da educação matemática, as quais facilitariam o ensino e assimilação do conteúdo, mostrando todos os benefícios trazidos por ele. Após isso, este trabalho apresenta uma proposta para o ensino das principais ideias da teoria dos grafos, de forma básica e didática, com foco na resolução de problemas, por meio da contextualização e interdisciplinaridade, com o objetivo de contribuir com a formação de professores (inicial e continuada), para que consigam, após análise e reflexão da proposta, repassar para seus alunos em sala de aula aquelas ideias importantes desse conteúdo. Para a proposta, abordamos a teoria dos grafos por meio de problemas clássicos e exemplos simples e contextualizados, indicando aspectos que podem ser explorados junto aos alunos, deixando sugestões de atividades lúdicas e de outros artigos e trabalhos, visando contribuir com a inserção do tema, considerando sua relevância para a formação do aluno.

Palavras-chaves: Teoria dos grafos, matemática discreta, ensino de matemática, educação básica.

Sumário

Introdução

O conhecimento matemático é fundamental em diversas situações, por exemplo, diferente do que é muitas vezes utilizado, descobrir qual o caminho mais curto de um bairro a outro para um determinado meio de transporte, manipulação em massa de produtos ou, ainda, como forma de desenvolver o pensamento crítico. Muito por conta do sistema educacional, muitas vezes, não é simples que o professor tenha tempo e disposição para preparar algo diferente do convencional, podendo também a matéria em si, dependendo de qual for, contribuir para tal.

A teoria dos grafos vem totalmente na contramão da monotonicidade de algumas matérias do ensino básico. Isso por conta de ser uma matéria simples de ser entendida, através de poucas definições e de sua aplicabilidade no dia a dia, fazendo com que gere interesse dos estudantes.

Um grafo é, basicamente, a união de pontos, chamados de vértices e linhas, chamadas de arestas, ligando os vértices. E podem ser utilizados em inúmeras situações como já foi citado, porém, o que faz com que a teoria fique cada vez mais importante é todo o avanço tecnológico dos últimos tempos. A base das estruturas de dados é, basicamente, dada por grafos, manipulada de maneira discreta. Portanto, seria de suma importância isso ser ensinado para os estudantes o mais cedo possível.

Esse trabalho foi feito com o principal intuito de apresentar o assunto que é diferente do tradicional e que ainda não está incluso nos currículos de todo o país, investigando sobre a viabilidade dessa inserção. Além disso, para tal inserção, o trabalho vem para discutir sobre um questionamento natural após a constatação de que o tema não está presente nos currículos básicos, quem ensinaria e como ensinariam tais tópicos no ensino básico brasileiro? Uma resposta natural seriam os professores de matemática, entretanto como estes poderiam ensinar algo que nem sequer é aprendido durante sua formação?

Para isso, nosso trabalho foi dividido em duas partes. Na primeira, foi dada uma visão geral sobre o estudo da matemática discreta, que é onde a teoria dos grafos se encontra. Visão essa voltada primeiramente para a educação básica do país e em seguida voltada para a teoria dos grafos em si no ensino superior. Foram também citadas as tendências da educação matemática modelagem matemática e resolução de problemas, mostrando o quanto as duas estão intrínsecas na teoria dos grafos, podendo ser utilizadas para o ensino da mesma.

Na segunda parte é onde apresentamos a base da teoria dos grafos, suas principais definições, teoremas e demonstrações. Juntamente com eles, exemplos e referências para ficar mais fácil a abstração e fixação do tema e também sugestões para os professores poderem utilizar na sala de aula. Apresentamos o **problema das sete pontes**, que foi como toda a história da teoria dos grafos começou, com Leonhard Euler.

No capítulo seguinte, e último, foi exposto o assunto de **coloração em grafos**, que também surgiu de um problema, onde um estudante notou que eram necessárias apenas quatro cores para pintar um mapa que estava colorindo, surgindo então o problema das **quatro cores**.

É importante deixar claro que todas as partes matemáticas apresentadas vêm seguidas de alguma sugestão de metodologia ou de outros trabalhos mais focados no tema em questão, para que o objetivo do trabalho seja cumprido, que é ser uma base para os professores tanto aprenderem sobre a teoria dos grafos, quanto para ajudá-los a ensinar para seus alunos.

Parte I

Grafos na educação básica

1 Uma visão geral sobre o ensino de grafos

Nossa principal discussão neste trabalho é sobre uma possível inserção de um novo tópico no currículo de matemática da educação básica, focado no ensino médio, a teoria dos grafos. A teoria dos grafos é parte da área que conhecemos como matemática discreta e entender um pouco da área da matemática na qual a teoria está inserida é nosso ponto de partida. Argumentaremos também sobre como tal inserção é possível e, de certa forma, necessária, uma vez que a necessidade de mudanças nos currículos é fundamental para acompanhamento dos avanços tecnológicos da atualidade e isto está em consonância com os documentos oficiais. Apresentaremos o ponto de vista de pesquisadores que defendem a mesma, que se mostra, antes de tudo, necessária para que os objetivos esperados para os alunos do ensino básico, segundo os documentos oficiais, possam ser atingidos mais facilmente.

1.1 A matemática discreta na educação básica

A matemática discreta é o estudo de estruturas matemáticas que são fundamentalmente discretas, ao invés de contínuas. A palavra discreta nesta situação tem origem no inglês *discrete*, significando diferente, distinta e não seu sentido habitual. De maneira mais simplificada, é a parte da matemática incumbida de estudar estruturas e objetos finitos. Exemplos de problemas que envolvem a matemática discreta são: De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma senha para o instagram? Qual a probabilidade de ganharmos na loteria? De quantas maneiras podemos escolher uma combinação de roupas onde temos n shorts e m camisetas? Qual o caminho mais curto de um bairro a outro para um determinado meio de transporte? Assim, usamos matemática discreta quando contamos objetos, quando estudamos relações entre conjuntos finitos e quando analisamos situações com um número finito de passos. Com os avanços tecnológicos, em especial dos computadores, a matemática discreta tornou-se uma área de extrema importância, já que as informações computacionais são armazenadas e manipuladas de maneira discreta.

Sabendo disso, qual a importância da matemática discreta neste trabalho? Para responder essa pergunta, vamos pegar um problema genérico envolvendo grafos: Descobrir qual é o caminho mais curto entre duas cidades para um determinado sistema de transporte. Esse problema, assim como a teoria dos grafos, faz parte da matemática discreta, por ser um problema de solução finita. Por esse motivo, antes de falarmos especificamente sobre a teoria dos grafos, é conveniente falarmos da área na qual esta se insere.

À título de curiosidade, alguns outros problemas estudados pela matemática discreta e que são comumente conhecidos são os problemas de análise combinatória e princípio fundamental da contagem. Um passo importante é saber a opinião dos autores sobre a matemática discreta na educação básica no Brasil. É indiscutível a importância dela na educação básica, pois ela está presente em todos os campos da matemática abordados pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2016), que são aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade. E alguns fatores, além da presença na BNCC, mostram que cada vez mais a matemática discreta precisa fazer parte da base da educação.

Um fato que torna a matemática discreta de suma importância é a popularização dos computadores, já que estes consistem numa estrutura finita de dados que trabalha a partir de comandos matemáticos. Assim espera-se que a estrutura educacional acompanhe os avanços e necessidades atuais.

> A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade (SANTALó, 1996).

Considerando que as novas gerações terão que lidar com esses tipos de problemas, que exigem competências e habilidades específicas, cabe aos sistemas educacionais, prepará-los para tal, proporcionando a adaptabilidade às novas tecnologias que estão para surgir. Mas em contrapartida, o que é uma crítica de alguns escritores, nem todos da nova geração vão lidar diretamente com essas novas tecnologias, logo tem que haver uma mescla com as matérias tradicionais, que formam a base do currículo matemático há anos. Assim, sem muita discussão sobre a importância dela, a maioria dos escritores se divide em falar sobre diferentes campos, ou tópicos, da matemática discreta no ensino básico.

Assim como no Brasil, nos demais países a presença da matemática discreta em seus currículos básicos é notória. Porém, diferente daqui, alguns países já apresentam a teoria dos grafos com certa importância na educação básica. Desde 1999, a França incluiu um capítulo dedicado à teoria dos grafos no seu currículo do último ano do ensino pré-universitário que é dedicado aos alunos que pretendem se encaminhar para carreiras em economia e ciências sociais. Nos Estados Unidos, existem um instituto de pesquisa e uma organização, ambos com o foco em abordar temas e divulgar a matemática discreta na sala de aula. O instituto é o National Science Foundation - NSF, que teve como primeira iniciativa um projeto realizado entre 1996 e 1999, abordando nos dois primeiros anos os temas de geometria computacional e criptografia e nos dois últimos a teoria dos grafos. E a organização é a Consortium for Mathematics and Its Applications - COMAP, sem fins lucrativos, dedicada ao desenvolvimento de materiais para o ensino de matemática em todos os níveis. A maior parte do material da COMAP aborda temas de modelagem matemática e de matemática discreta num contexto de sala de aula. A COMAP também oferece um vasto banco de modelos matemáticos para uso em sala de aula, classificados pelo ramo da matemática que abordam, em CD e online.

1.2 Uma inserção necessária

Que a matemática discreta está presente tanto no nosso currículo básico quanto no de outros países, não é algo a se discutir, é um fato. Mas a questão que colocamos é se a teoria dos grafos também está presente. Já vimos que está em alguns currículos de outros países, porém o mesmo não ocorre no Brasil. A seguir veremos se é possível e até mesmo pertinente fazer tal inclusão no âmbito educacional brasileiro, ainda que fossem inseridos somente conceitos básicos da teoria. Isso porque, na teoria dos grafos, os conceitos básicos são suficientes para resolver diversos problemas do cotidiano. Ou seja, uma pequena introdução sobre o assunto seria suficiente para que alunos, de idades variadas, pudessem entender e, consequentemente, usá-la no dia a dia e tomarem assim, consciência da importância de tal assunto. Para falar sobre isso podemos nos apoiar na nossa Base Nacional Comum Curricular, que é o documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. Nela estão presentes, na etapa do ensino médio, cinco "competências específicas de matemática", que, se olhadas separadamente, podemos ver mais de um motivo para não deixarmos a teoria dos grafos de fora do currículo básico nacional. E são elas:

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das ciências da natureza e humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;

- Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática;

- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;

- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;

- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

No decorrer do trabalho ficará claro que a teoria dos grafos pode se encaixar perfeitamente em todas essas competências, como por exemplo por sua grande aplicabilidade no cotidiano, trazendo respostas para problemas reais e sua capacidade de fazer com que o aluno crie suas próprias estratégias para tal resolução, ajudando no desenvolvimento pessoal e intelectual do mesmo, utilizando conceitos, não só da matemática, aprendidos em séries e anos anteriores, seja individualmente ou em grupos.

Segundo (PEREIRA; GAUTERIO; DALLASTA, 2011), essa vantagem do uso da teoria dos grafos em "atividades práticas do cotidiano, em especial na resolução de problemas, parece estar completamente dissociado da realidade do aluno do ensino fundamental e médio, pois não aparece nos livros texto utilizados pelos professores em sala de aula, excluindo-se desta forma um saber matemático desafiante ao estudante."

É claro que a inserção de um tópico diferente na base curricular de um país não é uma coisa muito simples de ser feita. A curto prazo, uma saída é a inserção dos novos tópicos por meio de atividades extracurriculares. Em (FERREIRA; LOZANO, 2009), há a proposta de uma oficina de coloração de grafos voltada tanto para o ensino médio quanto para o fundamental foi proposta. A atividade foi aplicada para alunos do segundo ano do ensino médio e do sexto ano do ensino fundamental e, como descrito no artigo, em ambos os grupos de alunos o entendimento do assunto foi bem satisfatório, mesmo que a atividade tenha sido melhor desenvolvida pelos alunos do ensino médio por conta de uma bagagem de conteúdo maior.

Mesmo através de atividades extracurriculares, existe um enorme problema encontrado quando se fala no ensino da teoria dos grafos na educação básica: muitos professores de matemática nunca viram o assunto na sua graduação, ou, se viram, na maioria das vezes, foi de uma forma extracurricular. Daí um questionamento importante é: como os professores em formação ou já formados, poderiam aprender e em seguida ensinar a teoria dos grafos aos seus alunos, já que este conteúdo não esteve presente na sua formação docente? Resumindo, como ensinar o que não foi aprendido?

Neste sentido, a proposta de (SILVA; PEREIRA; BISOGNIN, 2014) foi desenvolver um trabalho aplicado a professores atuantes da rede pública, com a intenção de capacitar os mesmos a poder introduzir a matemática discreta por meio da teoria dos grafos para seus alunos.

> Nesses tempos de mudanças nos paradigmas da educação, onde buscamos cada vez mais conectar o ensino com as demandas atuais, como por

> exemplo a tecnologia, é razoável que os professores busquem melhorar sua prática pedagógica tendo em vista que o modelo tradicional de ensino tem se mostrado fadigado quando se fala em termos de processos de ensino e aprendizagem (SILVA; PEREIRA; BISOGNIN, 2014).

O trabalho de (SILVA; PEREIRA; BISOGNIN, 2014) consistiu em uma oficina com uma introdução em forma de vídeo, mostrando a origem da teoria dos grafos e algumas de suas aplicações e logo após atividades propostas sobre coloração em mapas. Durante as atividades, os conteúdos matemáticos vão sendo introduzidos de forma mais sistemática, levando os participantes a transformarem os mapas em grafos e fazendo, assim, eles assimilarem o conteúdo para depois discutirem sobre as estratégias para encontrar um número mínimo de cores para se colorir um grafo (mapa).

Voltaremos a falar de algumas propostas e trabalhos existentes sobre o tema mais adiante. Antes disso, iremos apresentar talvez o maior dos problemas existentes para uma inserção mais viável da teoria na educação básica, que é quando, onde e para quem é apresentada a teoria dos grafos nos cursos superiores.

2 Como ensinar o que não é aprendido?

Um dos maiores problemas encontrados para inserção da teoria dos grafos na educação básica é o fato de que, em geral, nem os professores de matemática possuem conhecimento acadêmico sobre o assunto, mesmo com currículos estaduais e nacionais sendo totalmente favoráveis a essa inserção. Com isso o objetivo dessa seção é dar um panorama geral de como este tópico chega ou não, até os professores em formação e aos alunos na educação básica.

Como a nossa discussão se pauta sobre a inserção de um tópico novo nos currículos, daremos sugestões de como isso pode ser feito, mostrando que não é algo totalmente inovador, já que a teoria dos grafos é totalmente condizente com algumas tendências da educação matemática amplamente utilizadas e estudadas em diversos contextos. Apresentaremos algumas dessas tendências e citaremos trabalhos onde estas, já são utilizadas como ferramenta para ensino da teoria dos grafos.

2.1 Currículos superiores

Uma das principais problemáticas abordadas pelos estudiosos do tema é a de que os currículos da matemática são não imparciais no que diz respeito a valores, crenças e interesses.

> "Com frequência, currículo é usado, indiscriminadamente, para designar o programa de uma disciplina, de um curso inteiro, ou num sentido mais amplo, descrito como abrangendo as várias atividades educativas por meio das quais o conteúdo é desenvolvido, bem como os materiais e metodologias utilizadas. Quando se pergunta o que é currículo, não se trata de escolher a definição mais divulgada, mais moderna ou mais aceita pela comunidade científica, mas sim, de se entender currículo como o pensar e o agir a respeito das seguintes questões: Para que ensinar? A quem ensinar? O que ensinar? Como ensinar? O currículo tem uma especificidade muito particular. Todos os que dele participam e todos os que têm ingerência sobre o currículo, não o fazem de maneira neutra. Trata-se de uma área impregnada de valores, ideologias, forças, interesses e necessidades e exige, para uma definição mais exata, a explicitação de um quadro de referência filosófica, histórica, política (MALTA, 2013)."

Há uma frase célebre de Paulo Freire que diz "Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo" e com ela podemos traçar um paralelo com o assunto abordado no nosso texto. Pois um dos motivos de o currículo ter viés político e ideológico é que as ideologias moldam as pessoas e, no momento em que essas pessoas são colocadas para desenvolver um currículo, despejam toda sua ideologia no mesmo e, como não existe uma pessoa que seja alheia à ideologias e convicções, o produto gerado por elas dificilmente vai ser.

Portanto, não parece razoável que exista um modo de acabar totalmente com a não neutralidade dos currículos, podemos ao menos chegar a um senso comum entre um currículo tanto para o ensino técnico quanto para o teórico (no sentido de crescimento intelectual e pessoal a partir do estudo da matemática).

Durante a pesquisa sobre a presença da teoria dos grafos nos currículos básicos dos cursos superiores foi notado que, em alguns cursos que envolvem otimização de processos, ela está presente. Em cursos que envolvem computação é comum a presença dela. Por exemplo, analisando o catálogo de graduação dos cursos de Ciência da Computação, Engenharia de Alimentos, Engenharia de Agrimensura, Engenharia de produção e Matemática - Bacharelado, da Universidade Federal de Viçosa, disponível no site do registro escolar da instituição, podemos encontrar uma disciplina denominada de "Pesquisa Operacional I" que, aparentemente, é uma coisa totalmente específica e fora da realidade desse trabalho, porém analisando as seções encontramos a teoria dos grafos que aparece em uma subseção com o nome de "Introdução à teoria dos grafos", o que é bem natural de se pensar. Porém, um erro comumente cometido é o de não enxergar a teoria dos grafos dentro de outras categorias com o nome não tão explícito. Por exemplo, na continuação desse capítulo, as subseções seguintes são Fluxos em Redes, Fluxo do Custo Mínimo, Problema de Transporte e Caminho do Custo Mínimo, matérias essas totalmente baseadas em grafos, com alguns desses apresentados posteriormente nesse trabalho. Dentre esses cursos, o que mais chama atenção, pelo menos para este trabalho, é o de Matemática - Bacharel, onde a matéria é obrigatória. Para o curso de Matemática- Licenciatura a matéria é optativa e além disso não existe mais nenhuma matéria no currículo que contenha a teoria dos grafos. Isso é um padrão, como por exemplo na Universidade Federal do Espírito Santo, campus de Alegre, instituição de quem vos escreve, a disciplina "Teoria dos Grafos" é obrigatória no curso de ciência da computação, com o intuito de ajudar na criação de estruturas de dados. E novamente, para o curso de matemática - licenciatura, a mesma disciplina aparece somente como optativa, resultando no fato de que a maioria dos alunos nem sequer ouvem falar dela, por não ser algo incentivado nem mesmo pelos professores. O que nos faz questionar e pesquisar alternativas para alterar essa realidade.

2.2 Tendências da educação matemática

Antes de falarmos sobre algumas das tendências da educação matemática especificamente, é importante contextualizar em qual/quais tendências educacionais a teoria dos grafos mais se encaixa pois, diferentemente da matemática atualmente mais ensinada nas escolas que se enquadra na tendência tecnicista, a teoria dos grafos é totalmente pautada na tendência construtivista que diz que "o conhecimento matemático se dá pela ação do indivíduo com o meio ambiente através da construção, destacando o aprender a aprender."

Para obter esse conhecimento matemático pela ação com o meio ambiente e aprender a aprender, na educação matemática, duas tendências parecem surgir como ferramentas naturais e interessantes: a modelagem matemática e a resolução de problemas. Uma que transforma coisas da nossa realidade em objetos matemáticos e outra que estimula o aprendizado por esses objetos, com o protagonismo dos alunos, aprendendo por conta própria a resolver uma situação-problema, desenvolvendo pensamento crítico e raciocínio lógico.

Modelagem matemática

A modelagem matemática, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão de um fenômeno natural. Esse fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento. Atualmente, podemos perceber o uso da modelagem matemática na criação de bovinos, produção de materiais para construção civil, movimentação de animais, crescimento de cidades, controle biológico de pragas entre outros exemplos.

Na perspectiva de D'Ambrósio (1986) (apud (MOREIRA, 2015) "Modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial" .

> "A Modelagem não é utilizada apenas por matemáticos, como Euler, para resolver problemas da realidade. Ela também serve como ferramenta para físicos, químicos, biólogos e vários outros profissionais para matematizar fenômenos, buscando a compreensão do mundo em que vivemos. Se tomarmos como exemplo a Física, teremos uma grande quantidade de fórmulas que descrevem fenômenos naturais. Barbosa (2001a, p. 12) destaca que esse uso da matemática serviu para identificá-la como "instrumento: o mundo poderia ser descrito em relações matemáticas" (AQUINO, 2014).

A modelagem matemática tem papel fundamental em qualquer coisa relacionada a teoria dos grafos pois a teoria dos grafos é totalmente pautada nela, transformar problemas reais em um grafo e desenvolver resoluções a partir dele. E por esse fato, é fácil relacionar a modelagem na teoria dos grafos com outras áreas, como em "Ensinando grafos a partir da abordagem histórico-investigativa" de Lauro Chagas e Sá e Sandra Aparecida Fraga da Silva, no qual se utiliza, como diz no próprio título, uma abordagem histórico-investigativa para apresentar, juntamente com o problema que fez com que a teoria fosse criada, o básico da parte matemática da mesma e suas resoluções.

Desta forma, o artigo traz duas das coisas mais interessantes da teoria dos grafos, que são sua história e como o problema nela envolvido pode ser resolvido a partir da matemática, buscando organizar o que aparentemente é difícil demais para ser resolvido.

> "Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que reformulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado" Ponte; Brocardo; Oliveira (apud (Sá, 2016)).

Resolução de problemas

A resolução de problemas, assim como citado na parte de modelagem matemática, tem total importância para a teoria dos grafos, elas se completam. Um transforma um problema real em um objeto matemático enquanto o outro é usado para solucionar o mesmo.

Ela vem para quebrar um pouco do sistema de exercícios de fixação, que é basicamente uma repetição forçada de algum algoritmo matemático. E o modo como ela faz isso é bem simples, é apresentada ao aluno uma situação-problema, "uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. Essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema se dá ao vencer o obstáculo na realização da tarefa" Meirieu (apud (LIMA, 2012)), para que ele, por conta própria, crie um método para a solucionar.

> "A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. Assim ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros [...]" Pozo e Echeverria (apud (SANTANA, 2015)).

Isso, em um contexto de sala de aula, fica mais simples, visto que antes de entregar aos alunos, o professor pode dar uma primeira orientação e contextualização para que os alunos tenham pelo menos um ponto inicial e não fiquem desmotivados em não "saírem do lugar" na resolução. Para isso, é importante que o professor atue como articulador no processo ensino-aprendizagem, e faça uso de metodologias que venham de encontro às necessidades atuais da educação. Nessa perspectiva, o ensino da matemática pode contribuir para que o aluno não seja apenas um sujeito passivo que recebe informações, desconectadas da realidade, mas que as compreenda e, em vista delas, tome iniciativas e faça parte do processo de construção do próprio conhecimento, que é o principal objetivo dessa tendência pedagógica.

Bons exemplos da resolução de problemas na teoria dos grafos, são os problemas clássicos como o das pontes de Konigsberg e o da coloração em mapas, explicados nos capítulos 3 e 4 deste trabalho, respectivamente. Outros exemplos e um pouco mais sobre o tema podem ser encontrados em "Resolução de problemas via Teoria de Grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica" de Danila De Fátima Chagas Assis, onde ela, além de mostrar outros problemas clássicos, fez uma pesquisa sobre a teoria dos grafos já presente nos livros didáticos e aplicou um questionário onde as respostas foram bem interessantes em relação a satisfação com a matemática da escola e como a resolução de problemas cativa, e pode cativar, mais os alunos do que o método usual da matemática.

> "O grande problema que os alunos têm com a Matemática é o medo de errar; observa-se que mais de 90% dos alunos ficam nervosos ao terem de resolver um problema matemático, sendo que destes, em quase metade dos casos, isso acontece frequentemente ou sempre, algo preocupante. De todos os alunos participantes da experiência, mais da metade não costuma conseguir bons resultados em Matemática, outro dado para se analisar. O nervosismo que sentem ao se deparar com uma questão que envolva conhecimento lógico ou prático recém adquirido e o coloque em teste" (ASSIS; AVILA, 2017).

Parte II

Teoria básica dos grafos

3 Passeios de Euler

O objetivo desta parte do trabalho é introduzir os conceitos básicos da teoria dos grafos aos quais nos referimos na maior parte do trabalho e comentar sobre eles com o intuito de deixar o mais claro possível como ensiná-los. Exploramos os conceitos matemáticos envolvidos na teoria básica a fim de visualizarmos a teoria dentro do universo matemático e dessa forma, compreender sua importância e algumas de suas aplicações mais básicas. Apresentaremos também a definição de passeios de Euler que, de certa forma, marca o início do estudo do tema, quando, por um problema real das pontes de Konigsberg, Euler se viu obrigado a formalizar alguns conceitos. Para um formalismo maior das ideias tratadas aqui, bem como sugestões para aprofundamento na teoria indicamos (NETTO, 1979) e (JURKIEWICZ, 2009).

3.1 Definições e exemplos

Para iniciar os estudos sobre a teoria dos grafos precisamos conhecer primeiro os seus conceitos básicos. Um **grafo** é, basicamente, a união de pontos, chamados de **vértices** e linhas, chamadas de **arestas**, ligando os vértices.

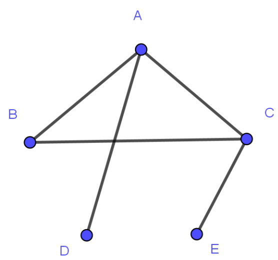

Figura 1 – Exemplo de grafo.

Mas não pense que grafos se resumem a formas geométricas, eles são usados em inúmeras situações. Por exemplo, imagine que cada vértice da imagem anterior represente um clube participante de um campeonato de futebol, cada aresta, nesse caso, representa um confronto de um time com o outro. Então, no nosso grafo anterior as informações que podemos tirar são:

Time	Jogou contra
A	B, C e D
B	A e C
C	A, B e E
D	A
E	C

Formalmente, temos que um **grafo** $G = G(V, E)$ é uma estrutura matemática composta por um conjunto V, finito e não vazio, de n vértices e um conjunto E, finito, de m arestas que são pares não ordenados de vértices. Logo, quaisquer duas, ou mais, coisas que se relacionam entre si, podem ser modeladas via grafos.

Uma sugestão para começar a apresentação de grafos é trazer aos alunos a discussão sobre o que seriam exemplos de grafos dentre os objetos que eles já conhecem. É natural que respondam sobre as figuras geométricas e/ou sólidos geométricos, o que é um bom caminho, mas caso fujam disso e falem objetos ou estruturas do dia a dia é melhor ainda, pois pode trazer a realidade do aluno para o papel. Independente do que ocorra, é interessante que o professor dê outros exemplos além dos expostos pelos alunos para que eles tenham ideia de como é amplo o campo de aplicabilidade da teoria. Outra coisa importante é levar esses exemplos dados pelos alunos pelo resto da explicação. E é essencial que nenhum exemplo dado seja descartado sem uma explicação, pelo menos do porque de não servir ou não ser um grafo, pois assim o aluno não fica inseguro de tentar novamente.

Exemplo 1. *No grafo G abaixo, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. E portanto as arestas são $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_4\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_1, v_3\}$, $e_5 = \{v_1, v_4\}$.*

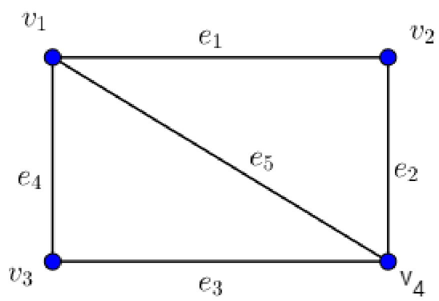

Figura 2 – Exemplo de grafo.

- **Vértices adjacentes**: Dizemos que dois vértices são adjacentes se existe uma aresta, a qual chamamos de aresta **incidente** aos vértices, ligando os mesmos. Por exemplo, os vértices A e B da Figura 1 são vértices adjacentes.

- **Grau de um vértice**: Definimos o grau de um vértice pelo número de arestas incidentes a ele. E denotamos por $d(v)$ o grau do vértice v. Por exemplo, o vértice A tem grau $d(\mathrm{A}) = 3$, enquanto o vértice B tem grau $d(\mathrm{B}) = 2$ na Figura 1.

- **Grafo regular**: São grafos em que todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Chamamos de grafo k-regular o grafo com k sendo o grau de todos os seus vértices.

Exemplo 2. *No Exemplo 1 os vértices v_1 e v_3 são adjacentes, pois a aresta e_4 é incidente nestes vértices, mas v_2 e v_3 não são adjacentes. Os graus dos vértices são $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 2$ e $d(v_4) = 3$.*

Quando V é unitário e $E = \emptyset$, dizemos que G é o **grafo trivial**. Em alguns grafos podemos ter uma aresta ligando um vértice a ele mesmo, é o que chamamos de **laço**. Neste caso, na contagem do grau de um vértice com um laço, contamos duas vezes para cada laço, uma para cada extremidade da aresta incidente. Isso torna coerente o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Para todo grafo $G = G(V, E)$ temos*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot m,$$

onde m é o número de arestas existentes no grafo G.

Corolário 3.1. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

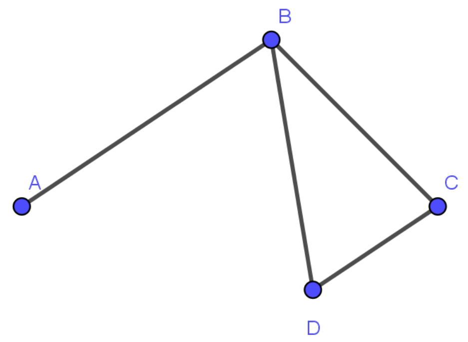

Figura 3 – Exemplo de grafo.

Vamos considerar o grafo da Figura 3 como exemplo. Note que ele satisfaz o corolário anterior pois os vértices que possuem grau ímpar são dois, A e B.

E mesmo se tentarmos fazer alterações nesse grafo, como por exemplo, fazer uma nova aresta ou um novo vértice, conectado por uma nova aresta, ele continua satisfazendo o corolário. Verifique isto na figura a seguir.

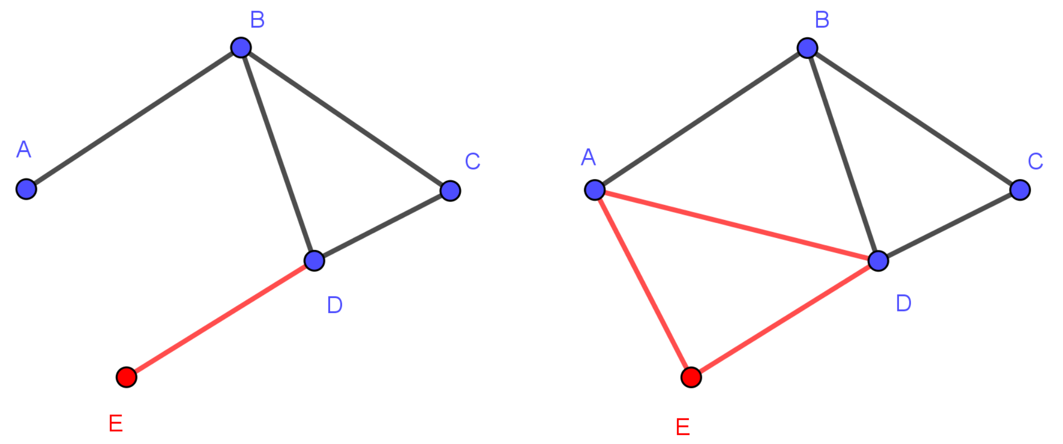

Figura 4 – Exemplo de grafo.

Dois vértices de um grafo podem estar ligados por mais de uma aresta e neste caso dizemos que o grafo possui **arestas múltiplas**. Grafos que não possuem arestas mútiplas e nem laços são ditos **grafos simples**.

Definição 3.1. *Sejam $G = G(V, E)$ e $G' = G'(V', E')$ grafos satisfazendo $V' \subset V$ e $E' \subset E$. Neste caso, escrevemos $G' \subset G$ e dizemos que G' é um **subgrafo** de G. Se dois vértices de G' são adjacentes se, e somente se eles são adjacentes em G, dizemos que G' é um **subgrafo induzido** de G.*

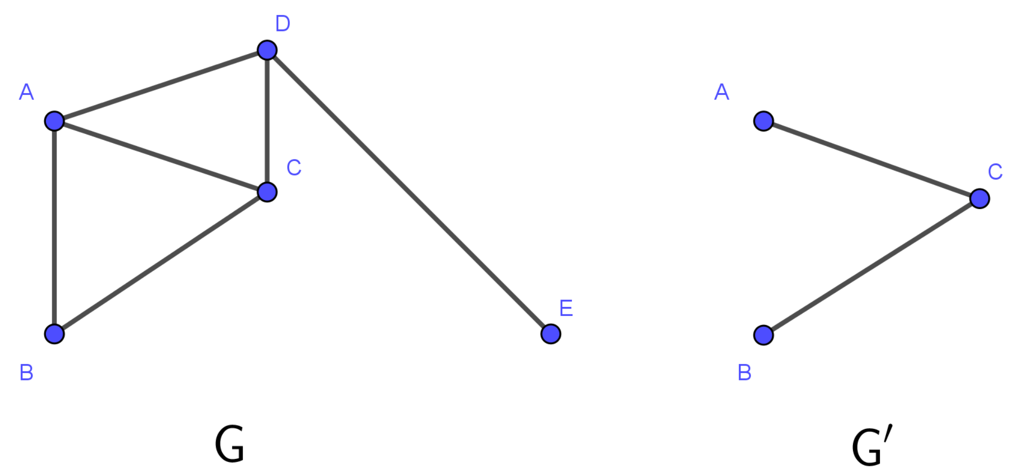

Figura 5 – Exemplo de subgrafo.

Exemplo 3. *Note que o conjunto de vértices de G' é um subconjunto dos vértices de G e o conjunto de arestas de G' é um subconjunto de arestas de G na Figura 5, logo pela definição anterior o grafo G' é chamado de subgrafo de G.*

Antes de iniciar a parte de subgrafos e subgrafos induzidos, seria interessante introuzir a noção de subconjuntos com exemplos bem simples, para que possa ser feito um paralelo entre as definições, primeiramente por conta da definição de subgrafos depender da de subconjuntos, mas também muito por conta da parte gramatical das palavras ja ser um ótimo ponto de comparação. Ao entender o que é um subconjunto, o conceito de subgrafo se torna mais sólido.

Uma sequência finita $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de um grafo $G(V, E)$ é dita uma **cadeia** de v_1 a v_k quando quaisquer dois vértices consecutivos dessa sequência são adjacentes. Essa cadeia é dita uma **cadeia fechada** se $v_1 = v_k$. Ou seja, o vértice onde a sequência começa é o mesmo onde a sequência termina. O número de arestas que ocorrem em uma cadeia é dito o **comprimento** da cadeia. Uma **trilha** é uma cadeia onde todas as arestas são distintas. Um **caminho** é uma trilha em que todos os vértices são distintos.

Isso é uma ótima oportunidade para retomar os exemplos citados pelos alunos na primeira parte da explicação, para que eles julguem se esses exemplos, depois de modelados, tem potenciais cadeias, caminhos, trilhas e cadeias fechadas. Isso ajuda a mostrá-los que está tudo conectado, e que é importante entender todas as partes do processo para se ter uma compreensão completa sobre o assunto. E também, o que é uma parte importantíssima, fazer eles se sentirem parte do processo, não somente um mero ouvinte enquanto o professor fala, pois é exatamente o contrário disso que queremos. Queremos que os alunos sejam os protagonistas, que eles busquem aprender para sozinhos resolverem e solucionarem os problemas, como se espera em atividades utilizando a resolução de problemas.

Definição 3.2. *Um grafo G é dito **conexo** se existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G. Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**.*

Exemplo 4. *O grafo G_1 da figura abaixo é um grafo conexo. O grafo G_2 é um grafo desconexo com duas componentes conexas.*

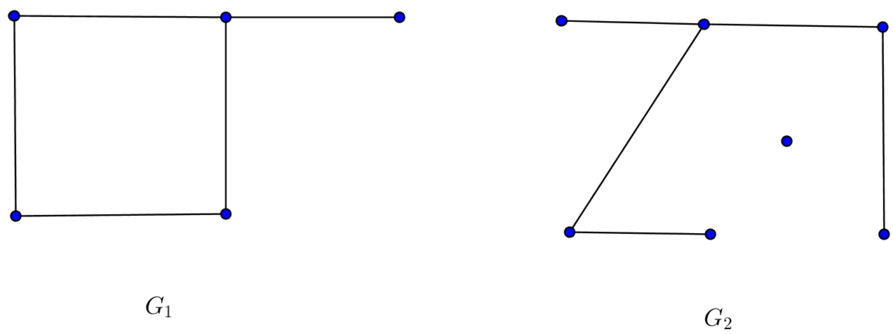

Figura 6 – Exemplo de grafos conexo e desconexo.

Um caminho fechado é chamado **ciclo** e um ciclo com três vértices é chamado **triângulo**.

Definição 3.3. *Um grafo G com m arestas é dito* ***euleriano*** *se existe uma trilha fechada de comprimento m em G. Se o grafo não é euleriano mas possui uma trilha aberta de comprimento m, ele é dito* ***semieuleriano****.*

Exemplo 5. *O grafo da figura a seguir possui a seguinte trilha fechada* ABCDECG-FEGBFA*, portanto é um grafo euleriano.*

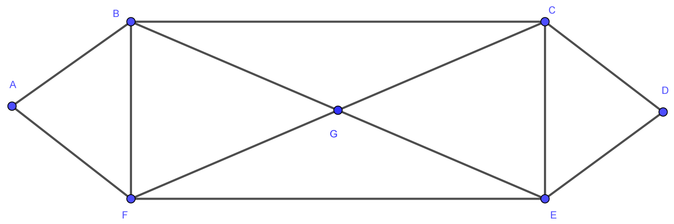

Figura 7 – Exemplo de grafo euleriano.

Para exemplificar sobre as definições e a maioria dos teoremas acima listados, além dos exemplos dados, podemos trazer um recurso bem didático e lúdico para os alunos: fazer um paralelo entre a matéria e a sala de aula, fazendo dela um grafo. Pode-se colocar os próprios alunos como os vértices do nosso grafo, basta colocarmos uma característica para ser a motivação das nossas arestas, como por exemplo para que time de futebol cada um torce ou quem gosta de tal tipo de alimento. Assim, para respostas iguais, conectamos os alunos, formando então um grafo. Daí, de uma forma mais concreta, utilizando os alunos, é possível revisar as definições.

3.2 O problema das pontes de Konigsberg

Pode ser que até o momento todos esses conceitos de grafos não pareçam estar tão conectados assim com nosso dia a dia, mas esperamos que nessa seção possamos ilustrar melhor isso. Além disso, ficará mais claro como a modelagem matemática e resolução de problemas são totalmente presentes na teoria dos grafos.

Inicialmente imaginemos que estamos diante do desafio de ter que desenhar um envelope, igual a do Figura 8, sem tirar o lápis do papel.

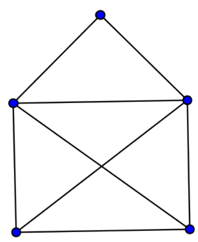

Figura 8 – Exemplo de grafo em formato de envelope.

Podemos reparar que o problema pode ser resolvido bem facilmente, porém se começarmos do ponto certo. Por exemplo, faça o teste, tente resolver começando de um dos dois vértices inferiores e depois começando de qualquer um dos outros.

Tanto esse quanto outros problemas tiveram uma solução pensada após Leonhard Euler, um matemático e físico suíço, em 1736, ser apresentado ao problema das pontes de Königsberg, que a consequência de sua solução culminou no surgimento da teoria dos grafos.

Veja que problema é esse e como ele ajudou na resolução dos outros. Königsberg no século 18, hoje Kaliningrado, era uma cidade portuária na antiga Prússia. Na parte central da cidade fluem duas vertentes do Rio Pregel, formando uma ilha entre eles. Para dar acesso à essa ilha existiam sete pontes interligando quatro regiões da cidade.

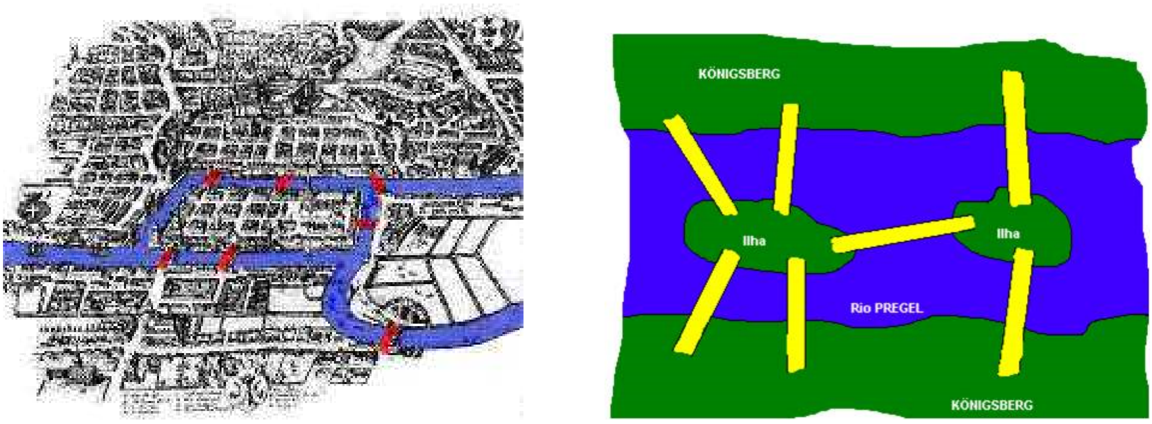

Figura 9 – Mapa da cidade de Königsberg.

A partir da configuração dessa ilha surgiu um problema quase que folclórico entre os habitantes. Seria possível fazer um passeio pelas sete pontes, porém passando apenas uma única vez sobre cada ponte? Tente fazer você mesmo um caminho por elas sem tirar o lápis do papel, passando apenas uma vez por cada ponte.

Euler tentou resolver esse problema usando apenas conceitos e raciocínios matemáticos, que acabaram evoluindo para a teoria dos grafos. Dentre esses conceitos temos o de grafo **planar**, isto é, um grafo que pode ser deformado (quando tem suas arestas esticadas, encolhidas ou deformadas), de modo a ser desenhado num plano, por exemplo, as arestas de um cubo como na figura a seguir.

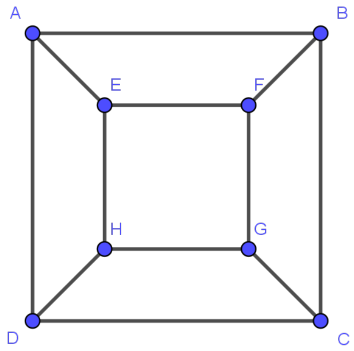

Figura 10 – Grafo de um cubo planificado.

Em geral, em problemas da teoria de grafos como o das pontes de Königsberg, dizemos que nosso objetivo é fazer um **passeio de Euler** pelo grafo que representa o problema, isto é, queremos determinar uma maneira de, sem tirar o lápis do papel, "passear" por todas as arestas do grafo que representa o problema, passando uma vez só por cada uma delas. Na teoria desenvolvida na seção anterior estamos procurando por uma trilha fechada no grafo abaixo que representa o problema das pontes.

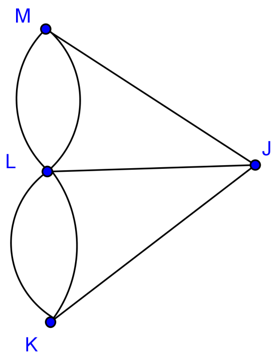

Figura 11 – Grafo que representa o problema das pontes de Könisberg.

Caso consigamos tal trilha, pela Definição 3.3, dizemos que o grafo é euleriano. Vejamos alguns resultado obtidos por Euler que nos dão soluções para problemas como o das pontes.

Teorema 3.2. *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem grau par.*

Demonstração: Considere um vértice qualquer do grafo, digamos A, e suponhamos que ele é um vértice intermediário (nem final, nem inicial) do passeio. Então, cada vez que chegamos em A, por meio de uma aresta do passeio, partimos de A logo em seguida e, assim, contadas as chegadas e partidas, teremos um número par de extremidades de arestas apoiando-se em A. Suponhamos agora que B é um vértice inicial e final do passeio. Então, calculando a ordem de B, contamos 1 (uma extremidade da aresta) na partida, mais 1 na chegada e somamos 2 (duas extremidades) cada vez que passamos por B (podemos, ao longo do passeio, passar diversas vezes por B). Logo, B também é um vértice de grau par. ■

Teorema 3.3. *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio têm grau ímpares e todos os demais vértices do grafo têm grau par.*

Demonstração: Se um vértice B não for o fim nem o início do passeio, então, como na demonstração do Teorema 3.2, toda vez que chegamos nele, no passeio, partimos em seguida e, assim, haverá um número par de arestas apoiando-se nele. Se A é o vértice inicial do passeio, então, ao calcular seu grau, contamos 1 quando partimos de A e somamos 2 cada vez que passamos por A. Assim, A é um vértice de grau ímpar. De forma análoga, para o vértice C, final do passeio, somamos 2 quando passamos por ele e mais 1 na chegada, sendo C, portanto, vértice de grau ímpar. Assim, os vértices final e inicial do passeio possuem grau ímpar e todos os demais vértices possuem grau par. ■

Teorema 3.4. *Se um grafo planar conexo tem seus vértices todos com grau par, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice.*

Demonstração: Consideremos um grafo em que cada um dos vértices tem grau par. Tomemos nele um vértice A_0. Seja a_1 uma aresta saindo de A_0 e chegando em A_1. Se $A_1 = A_0$, paramos por aqui (podemos ter $A_1 = A_0$). Se $A_1 \neq A_0$ e, como A_1 é um vértice de grau par, então existe uma aresta a_2 saindo de A_1 e chegando em A_2, $a_2 \neq a_1$. Se $A_2 = A_0$, paramos por aqui. Se $A_2 \neq A_0$, prosseguimos. Existe uma aresta a_3 saindo de A_2 e chegando em A_3, sendo $a_3 \neq a_0$ e $a_3 \neq a_1$. Assim prosseguindo, construímos uma sequência de arcos $a_1, a_2, \ldots$ até que não nos seja mais possível continuar, ou seja, até que cheguemos num vértice A_n, do qual não tenhamos mais saída.

Deveremos ter, então, $A_n = A_0$, pois, caso contrário, chegaremos no vértice A_n sem poder sair dele, após termos passado por ele (chegando e saindo) certo número de vezes e então A_n será um vértice de ordem ímpar. Assim, o caminho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é um caminho fechado que se inicia e termina em A_0. Se esse caminho contém todas as arestas do grafo, então nosso passeio de Euler está pronto.

Se esse caminho não contém todas as arestas do grafo, então, como o grafo é conexo, de algum dos vértices, digamos que A_s, parte um arco b_1 do grafo, estando fora do caminho

$a_1, a_2, \ldots, a_n$. O arco b_1 sai de $B_0 = A_s$ chegando a B_1. Se B_1 é diferente de B_0, existe uma aresta b_2, fora do caminho $a_1, a_2, \ldots, a_n$, saindo de B_1 e chegando em B_2.

Repetindo o procedimento anterior usado para contruir o caminho fechado $a_1, a_2, \ldots, a_n$, construímos um caminho fechado $b_1, b_2, \ldots, b_m$, sendo $B_0 = A_s$ o ponto de partida e de chegada, com os arcos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ todos fora do caminho $a_1, a_2, \ldots, a_n$. "Inserimos" então, o caminho $b_1, b_2, \ldots, b_m$ no caminho $a_1, a_2, \ldots, a_n$, por meio do vértice A_s, obtendo um caminho fechado aumentado, $a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_m, a_{s+1}, \ldots, a_n$. Se este caminho for um passeio de Euler através de todo o grafo, terminamos nossa tarefa.

Se não for, novas ampliações, por novas "inserções" de caminhos, por meio de vértices dos caminhos fechados anteriormente contruídos, acabarão por esgotar todas as arestas do grafo, provendo-nos um passeio de Euler pelo grafo. ∎

Teorema 3.5. *Se um grafo planar conexo tem dois vértices com grau ímpar e os demais todos com grau par, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro.*

Demonstração: Chame de A e B os dois vértices de grau ímpar do grafo. Amplie o grafo criando uma nova aresta a, de vértices A e B (este novo grafo pode não ser planar, pois pode ser necessário inserir a nova aresta especialmente "por cima" das demais). Com a inserção da nova aresta, os vértices A e B tornam-se vértices de grau par. O Teorema 3.4 também é válido para grafos não planares, com todos os vértices de grau par, com a mesma demonstração (a restrição a grafos planares é feita exclusivamente pelo interesse em passeios de "lápis e papel"). Podemos, então, iniciar um passeio de Euler no novo grafo, partindo de B, caminhando inicialmente de B a A, pela aresta a e terminar o passeio em B. Concluído o passeio, descartamos a aresta a e teremos, então, um passeio de Euler, iniciado em A e finalizado em B. ∎

Com as informações obtidas a partir dos resultados acima podemos concluir o principal resultado desta seção: O famoso problema das pontes de Königsberg é impossível de ser solucionado, ou seja, não existe uma maneira de passar pelas sete pontes sem repetir ao menos uma delas. Para se certificar disso, analise o grafo da Figura 11 levando em consideração os teoremas 3.2 e 3.3. A teoria dos grafos é extremamente aplicável em situações da vida real, ajudando a resolver vários problemas, desde tabelas de campeonato, como já vimos no presente trabalho, até malhas complexas de redes sociais e softwares computacionais.

Greralmente, quando se trata de resolução de problemas é utilizado o conceito de **passeios de Euler**, pelo fato de que, como vimos anteriormente, terem diversos teoremas e demonstrações que podem contribuir para o desenvolvimento de uma solução. Por exemplo, imagine que uma empresa local de coleta de lixo, que faz uso de apenas um caminhão, atenda uma cidade X e que estavam tendo alguns problemas.

O caminhão estava gastando gasolina demais e as vezes tendo que ficar sem atender algum bairro. Por ser uma cidade com bairros muito distantes o caminhão precisa voltar antes de passar em alguns deles, visto que precisava descarregar o lixo coletado para poder voltar e passar nos lugares onde ainda não tinha passado. Na intenção de descobrir uma forma de contornar esse problema e otimizar o trabalho foi feita uma pesquisa e perceberam que o caminhão, para contemplar alguns bairros, passava repetidamente por algumas ruas. Podemos modelar a cidade, como o grafo na figura a seguir, sendo o vértice superior representando a empresa, os vértices azuis os bairros e as arestas as ruas que ligam esses bairros.

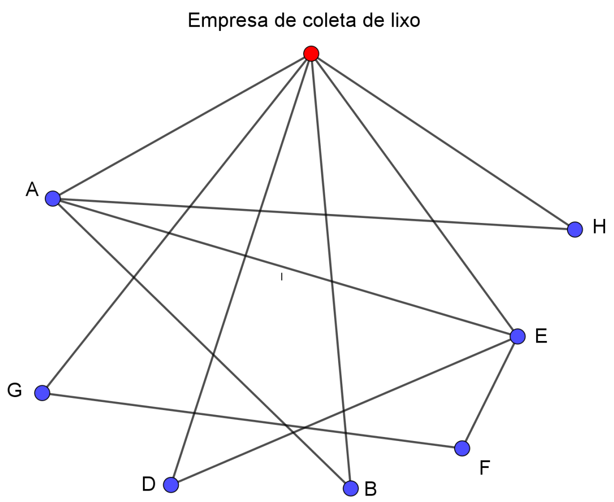

Figura 12 – Grafo que representa o sistema de coleta de lixo em um cidade.

A partir da definição de **passeio de Euler** fica fácil descobrir uma forma de minimizar esse trajeto, fazendo o caminhão gastar menos tempo e gasolina no processo. Note que o grafo se encaixa na definição de grafo Euleriano pois possui a trilha, considerando a empresa como o vértice C, CDEACEFGCHABC

Portanto, para haver uma diminuição das despesas com o caminhão e aproveitamento melhor do tempo, seria necessário somente o caminhão seguir esse caminho descoberto a partir do passeio de Euler. Pois como a maior distância, logo o maior problema, é entre os bairros, o passeio de Euler ajudou a fazer todo o percurso sem repetir nenhuma dessas longas estradas.

E também, como ja vimos anteriormente, a teoria de **passeios de Euler** aplicada em problemas reais pode nos mostrar que algo é impossível de ser feito, tomemos como exemplo o problema das pontes de Konisberg, que após ser representada por um grafo, notou-se através de inúmeras demonstrações que não era um grafo Euleriano.

Pelo fato dessa parte de passeios de Euler ser uma ótima ferramenta para resolver problemas, existem algumas maneiras de utilizá-la em sala de aula. Os exemplos dados acima são um bom caminho, começando por uma coisa mais simples como o da carta e aumentar um pouco o nível de dificuldade até o exemplo da empresa de coleta de lixo. É importante deixar com que os alunos conjecturem da sua forma onde poderia ou não existir um passeio de Euler, atendendo totalmente à resolução de problemas.

Para ter mais exemplos de atividades, indico o uso do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP, que conta com uma grande quantidade de questões sobre o assunto e sobre a teoria dos grafos em geral.

4 Coloração em grafos

Neste capítulo apresentaremos um clássico problema da matemática: o problema das quatro cores. Trata-se de um problema de coloração em mapas que deu início a uma das várias subáreas da teoria dos grafos, a de coloração em grafos. Iremos entender como colorir mapas pode ser visto como uma aplicação da teoria dos grafos. Para mais exemplos e comentários sobre o assunto sugerimos uma consulta a (SAMPAIO, 2008).

4.1 O problema das quatro cores

Os estudos sobre a coloração em grafos começaram a partir de um problema apontado por Francis Guthrie, um estudante de matemática da University College, em Londres, no ano de 1852. Em um dia Francis estava colorindo um mapa dos condados da Inglaterra e enquanto coloria o mapa, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países que tivessem alguma fronteira em comum. Ele notou que apenas quatro cores bastariam para colorir esse mapa. Experimentalmente, conseguiu colorir vários outros mapas fazendo uso de apenas quatro cores. Como um bom matemático, Francis tentou demonstrar que quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa, mas logo percebeu que essa demonstração não seria nada fácil. Então ele pediu ajuda a seu irmão Frederick Guthrie, estudante de matemática da mesma faculdade, que passou o problema para seu professor, que passou para seus colegas. O problema ficou conhecido por conta de uma carta escrita no mesmo ano, por De Morgan, professor de Frederick, a quem ele recorreu na época, onde dizia sobre o problema.

Figura 13 – Mapa dos condados da Inglaterra.

Um exercício interessante é verificar, se é mesmo possível colorir o mapa da Figura 13 com apenas 4 cores, seguindo as regras estabelecidas por Francis ao propor o problema da coloração de mapas.

De Morgan argumentou que, em qualquer mapa, não existem cinco países tais que cada um faça fronteira com os demais, ou seja, em cada agrupamento de cinco países, ao menos dois deles não são vizinhos. No entanto, tal propriedade não é suficiente para garantir que quatro cores sejam sempre suficientes para colorir qualquer mapa, sendo assim vamos omitir a explicação de De Morgan aqui.

Anos depois, em 1878, diversos matemáticos da comunidade matemática britânica se interessaram em tentar resolver o problema, após ele ter sido popularizado, através da London Mathematicial Society. Em 1879, um ano depois da divulgação do mesmo, Alfred Bray Kempe publicou um artigo onde supostamente dava uma demonstração de que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Porém, em 1890, 11 anos após a publicação, Percy John Heawood, por meio de um contra-exemplo, apontou um erro sutil e irreparável na demonstração de Kempe. Heawood foi, entretanto, capaz de salvar parte da demonstração de Kempe e demonstrar que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

A coloração em grafos pode ser usada de inúmeras formas que fogem da coloração de mapas. O fato de colorir vértices adjacentes, que são adjacentes por algum motivo específico, de cores diferentes nos abre um leque de possibilidades muito grande. Como por exemplo, se pegarmos uma empresa que trabalha com a fabricação de materiais de limpeza. Para a confecção desses materiais são utilizados produtos químicos que se organizados de forma equivocada, em seus compartimentos, podem gerar danos irreparáveis. Logo tem de se haver uma cautela muito grande nessa hora. Então, para que isso não ocorra e que todos os produtos que não podem ficar juntos não fiquem, basta utilizarmos a coloração em grafos.

Bom, mas onde a coloração em grafos entra nessa história? É simples, basta transformar os produtos de limpeza em vértices de um grafo e as arestas vão ligar os produtos que não podem de nenhuma forma ficarem juntos no mesmo compartimento na hora de serem guardados. Logo, após colorir o grafo, basta pegar os produtos que foram coloridos com a mesma cor e guardalos, sem nenhuma procupação, juntos.

Veja, suponhamos que existam 8 produtos, etiquetados de A a H.

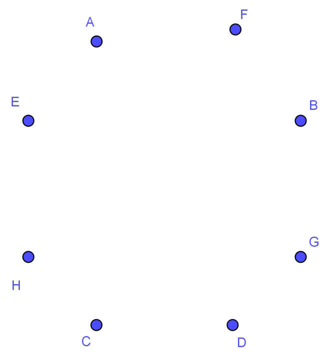

Figura 14 – Grafo que representa os produtos.

Porém o produto A se guardado com os produtos C e D, pode causar efeitos nocivos. Portanto, vamos ligá-los como a seguir

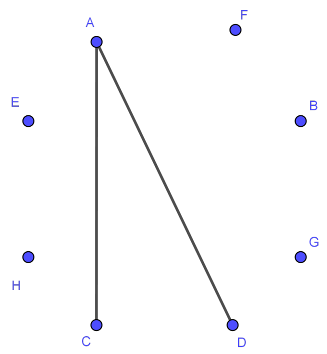

Figura 15 – Grafo dos profutos após as primeiras ligações.

Então, depois de ligar os vértices da forma correta, temos o seguinte grafo

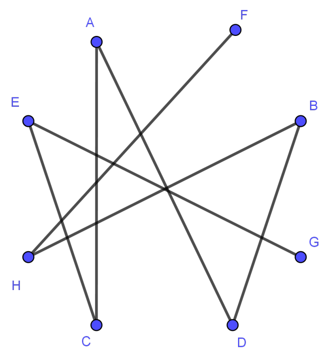

Figura 16 – Representação em grafos dos produtos devidamente conectados.

Bom, agora o que devemos fazer é colorir os vértices. Lembrando de colorir de cores diferentes os vértices que possuem alguma aresta em comum. Como por exemplo desta forma

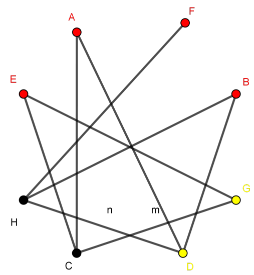

Figura 17 – Grafo dos produtos após coloração.

Assim, podemos identificar facilmente quais são os produtos que podem ou não ficar juntos na mesma prateleira. Basta não misturar produtos de cores diferentes. Ou seja, no nosso exemplo os produtos A, B, E e F podem sem nenhum problema serem guardados juntos, os produtos C e H também e os D e O da mesma forma.

Isso, talvez, em pequena escala seja um pouco desnecessário no ponto de vista de alguns, mas em grande escala, pode facilitar consideravelmente.

4.2 A matemática da coloração

A uma primeira vista pode parecer que não estamos falando mais de grafos. Porém, o problema de coloração de mapas pode ser visto como um problema de coloração de grafos da seguinte forma: dado um mapa, para cada região do mapa associamos um vértice e as linhas de fronteira serão associadas as arestas, isto é, regiões que possuem fronteira em comum corresponderão a vértices adjacentes no grafo.

Exemplo 6. *Note que fazer uma coloração no mapa abaixo equivale a uma coloração no grafo, de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.*

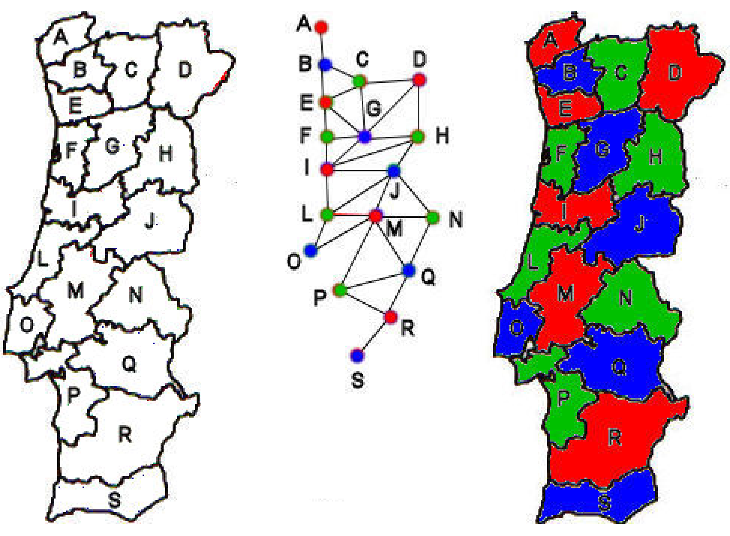

Figura 18 – Exemplo de mapa e seu grafo associado.

Definição 4.1. *Seja G um grafo simples conexo. Se a cada vértice de G puder ser atribuída uma cor, dentre k cores, tal que vértices adjacentes não recebam a mesma cor, dizemos que G é k-**colorível** e que temos uma **coloração** de G.*

Definição 4.2. *O **número cromático** de um grafo G é o menor número necessário para obter uma coloração de G.*

Observe, por exemplo a Figura 18, e note que verificar se um número k de cores é suficiente para colorir um mapa, de acordo com os critérios estabelecidos por Francis Guthrie, é equivalente a verificar se k cores são suficientes para colorir o grafo associado ao mapa, de modo que vértices adjacentes não possuem mesma cor. Entretanto, essa verificação no grafo é muito mais simples e rápida. Sendo assim, a teoria dos grafos torna-se uma ferramenta importante na resolução do famoso *problema das quatro cores*, que resultou no teorema a seguir.

Teorema 4.1 (Teorema das Quatro Cores)**.** *Todo mapa desenhado em um plano, pode ser colorido com no máximo quatro cores, sem que regiões com fronteira comum recebam a mesma cor.*

Que não há como colorir mapas com apenas uma cor é trivial e fácil de ser imaginado. Com duas também, embora em alguns nós conseguimos. Vejamos alguns exemplos:

Pode haver um mapa com três regiões que dê para ser colorido com duas cores, como a seguir:

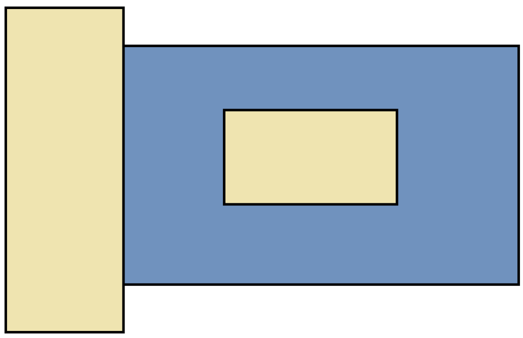

Figura 19 – Mapa com três regiões colorido com duas cores.

Mas também pode ser que duas cores não sejam suficientes, como podemos ver no próximo mapa.

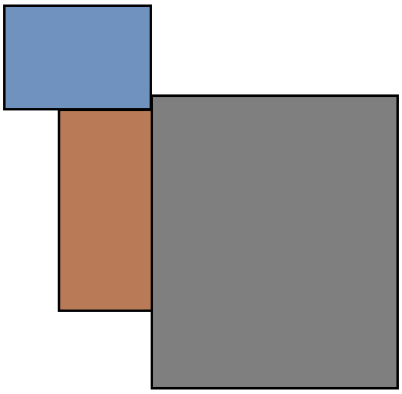

Figura 20 – Mapa com três regiões colorido com três cores.

A mesma coisa acontece com mapas com quatro regiões, pode ser que três cores sejam suficientes para colorí-los, mas pode ser que não seja possível, só podendo ser colorido com quatro cores.

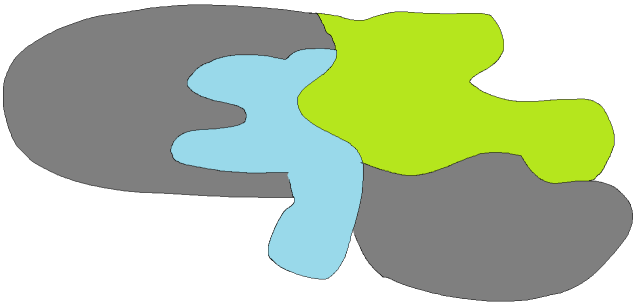

Figura 21 – Mapa com quatro regiões colorido com três cores.

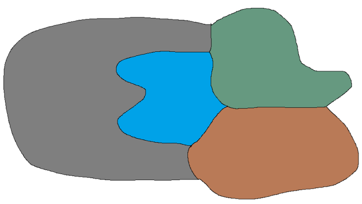

Figura 22 – Mapa com quatro regiões colorido com quatro cores.

Depois de mais de cem anos da divulgação do problema, o teorema acima foi demonstrado em 1976 pelo alemão Wolfgang Haken e o americano Kenneth Appel. A prova do teorema das quatro cores é muito notável na história da matemática pelo fato de ter sido a primeira prova auxiliada por computador.

Entretanto, muitos ainda não se sentem confortáveis com a demonstração deles, exatamente pelo fato de terem utilizado computadores de grande porte que foram responsáveis por fazerem uma parte substancial da demonstração. Em 1993, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas deram outra demonstração do Teorema das Quatro Cores que, apesar de envolver muitos recursos computacionais como a primeira, eles utilizaram um computador simples.

Porém, apesar da demonstração do teorema ter dado dor de cabeça para os matemáticos da época, é inegavel que a aplicação dele é algo significativamente simples e interessante de se compreender.

Por exemplo, uma abordagem muito interessante foi feita em uma oficina na Universidade Federal de Viçosa, proposta por Victor Martins e Michely Oliveira, "Um Convite à Teoria dos Grafos", com o intuito de introduzir o assunto da teoria dos grafos para professores do ensino básico a fim de que estes, ensinem o conteúdo em suas escolas de origem. Nessa oficina, que deixo como sugestão para aplicações práticas da teoria dos grafos e coloração, eles iniciam com a história de como toda a teoria surgiu seguida de alguns conceitos importantes para a compreensão de toda a oficina. E então, apresentam atividades e exemplos que, além de servir para que os professores aprendam e fixem o conteúdo, podem ser utilizados dentro da sala de aula, que é exatamente o objetivo do nosso trabalho.

E além dos trabalhos citados, é importante trazer o aluno para sua realidade, utilizando, talvez, um mapa da cidade local ou do estado em questão. Quanto mais recursos forem utilizados para prender a atenção e cativar o aluno, melhores serão os resultados. Sabemos que isso não é algo recorrente nas escolas hoje em dia, então é mais um diferencial para explorar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final da pesquisa feita para a elaboração da primeira parte do trabalho, foi possível perceber que o ensino da teoria dos grafos no Brasil ainda é ausente, e que a inserção da mesma é cada vez mais necessária, pudemos ver isso com o fato dos cursos de licenciatura em matemática não apresentarem o tema e, mesmo com a indicação na Base Nacional Comum Curricular, o ensino básico também não, mesmo considerando sua importância e potencial no desenvolvimento de habilidades e competências, no âmbito da matemática e para além dela. Essa defasagem ou ausência ficou ainda mais evidente quando comparado com outros países, o que foi mostrado logo no primeiro capítulo.

Após trazidas algumas justificativas para a inserção da teoria na educação básica, em especial no ensino médio, onde acreditamos ser mais pertinente tal inserção, ficou clara a necessidade de fazer com que os professores tenham ciência dela e uma base necessária para ensiná-la em sala de aula. Por isso o trabalho teve por objetivo apresentar situações que possam contribuir com uma abordagem contextualizada e interdisciplinar, que permita avançar por outros níveis de formalização dos conceitos envolvidos.

Notado isso, a estratégia que se mostrou mais adequada para tal, foi trazer a teoria de forma com que o professor, além de aprender sobre, saísse com estratégias para aplicá-la nas suas aulas, mesclando a parte matemática com a história, sugestões didáticas, referências e problemas clássicos. Mostrando, além de tudo, que o conteúdo não está alheio tanto às tendências da educação matemática, quanto ao mundo em volta dos estudantes, o que é um ponto muito positivo.

Referências

AQUINO, A. A. d. F. *Atividades de modelagem matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio*. Tese (Doutorado) — Dissertaçao (Mestrado Profissional em Matemática)-Universidade Federal de . . . , 2014. 17

ASSIS, D. d. F. C.; AVILA, J. A. J. Resolução de problemas via teoria de grafos: uma possibilidade de tornar a matemática mais atraente na educação básica. 2017. 19

BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2016. 11

FERREIRA, G. P.; LOZANO, A. R. G. A viabilidade do ensino de matemática discreta na educação básica usando modelagem matemática. In: *Anais do IX Congresso Nacional de Educação*. PUC -PR: [s.n.], 2009. 13

FRIEDMANN, C. V. P. *Matemática Discreta: Algoritmos, Modelos, Tendências do Ensino de Matemática no Início do Século XXI*. Tese (Doutorado), Rio de Janeiro, 2003.

JURKIEWICZ, S. Matemática discreta em sala de aula. In: *História e tecnologia no ensino de matemática*. IME/ UERJ, Rio de Janeiro: [s.n.], 2002. v. 1, p. 115–161.

JURKIEWICZ, S. *Grafos: uma Introdução*. 2009. 21

JURKIEWICZ, S.; LEVENTHAL, A. Oficinas de matemática discreta no ensino médio. In: CARVALHO L. M. *II História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. IME/ UERJ, Rio de Janeiro, 2004. p. 1–6.

LIMA, J. E. S. N. Maria Valgerlene de S. O uso de situações-problema como estratégia didática para o ensino de ciências no nível fundamental. 2012. 18

LOZANO, D. *Modelagem matemática e aplicações do problema de coloração em grafos*. Dissertação (Mestrado), São Paulo, 2007.

MALTA, S. C. L. Uma abordagem sobre currículo e teorias afins visando à compreensão e mudança. *Espaço do currículo*, v. 6, n. 2, p. 340–354, 2013. 15

MOREIRA, F. M. B. Modelagem matemÁtica: ReflexÕes teÓricas e aplicaÇÕes. 2015. 17

NETTO, P. O. B. *Teoria e modelos de grafos*. São Paulo: Editora Blucher, 1979. 21

PEREIRA, E.; GAUTERIO, E.; DALLASTA, M. Aplicações cotidianas no ensino fundamental sob um olhar da teoria de grafos. *Revista Cidadania em Ação - Extensão e Cultura*, v. 5, n. 1, 2011. 13

SAMPAIO, J. C. V. *Uma introdução à Topologia Geométrica passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores*. São Carlos, SP: EdUFSCar, 2008. 33

SANTALó, L. A. A matemática para não matemáticos. In: PARRA, C. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11–25. 11

SANTANA, G. de F. N. Resolução de problemas: abordagens no ensino fundamental ii. 2015. 18

SILVA, E. V.; PEREIRA, C. C.; BISOGNIN, V. Grafos: uma proposta de ensino de matemática discreta utilizando coloração de mapas. In: *Anais do XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul*. [S.l.]: UNIPAMPA, 2014. 13, 14

Sá, S. A. F. d. S. Lauro Chagas e. Ensinando grafos a partir de abordagem histÓrico-investigativa. 2016. 18