UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplinas: *Cálculo C/ Cálculo Diferencial e Integral II*
Prof. *Victor Martins*

Prova 1 - 26/10/2018

(Questões sem justificativas não serão consideradas, portanto apresente os cálculos e justificativas para cada solução. É proibido o uso de calculadoras.)

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) *(0,5 pontos)* Determine o domínio de f.

(b) *(0,8 ponto)* Encontre e esboce em um mesmo sistema de eixos coordenados as curvas de nível da função f de níveis $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) *(0,7 pontos)* Determine todas as derivadas de segunda ordem de f.

Questão 2: Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y - xy^4}{x^5 - y^5}, & \text{se} \quad y \neq x, \\ 0, & \text{se} \quad y = x. \end{cases}$$

(a) *(1,0 ponto)* f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(b) *(1,0 ponto)* f é contínua em $(1,-1)$? Justifique.

Questão 3:

(a) *(0,5 pontos)* Enuncie a **regra dos dois caminhos** para funções de duas variáveis.

(b) Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+4y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) *(0,7 pontos)* f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(ii) *(0,8 pontos)* Determine as funções $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, explicitando seus domínios.

Questão 4:

(a) *(1 ponto)* Determine a equação do plano tangente à $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ e paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

(b) *(1 ponto)* Assuma que a expressão $e^{(x+y+z)} + xyz = 1$ define implicitamente z como função de x e y. Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Questão 5:

(a) *(1 ponto)* Determine as direções em que a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 - y^2$ no ponto $P = (2, 1)$ assume o valor 6.

(b) *(1 ponto)* Se a temperatura da sala é dada por $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ e você está localizado em $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ e quer se resfriar o mais rápido possível, em que direção você deveria caminhar?

Questão Extra:

(a) *(1 ponto)* Mostre que se A, B e C são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ então $A \cap B \cap C$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

(b) *(1 ponto)* A **fronteira** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto frX formado pelos pontos $x \in X$ tais que toda bola de centro x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n - X$. Determine a fronteira de $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \text{ e } \dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

BOA PROVA!