Prova 3 (segunda chamada) - Álgebra Linear

31/01/2023

Questão 1:

a) Sejam $u=(x,y,z)$, $v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(u+v) = T(x+a, y+b, z+c) = (z+c, 0)$$
$$= (z,0) + (c,0) = T(x,y,z) + T(a,b,c)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha z, 0)$$
$$= \alpha(z,0) = \alpha T(x,y,z)$$

//

b)

$$T(1,1,1) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,2)$$
$$T(0,1,1) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,2)$$
$$T(0,0,1) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,2)$$

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

//

Questão 2:

a)

Sejam $p(x) = ax+b$, $q(x) = cx+d \in P_1(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(p(x)+q(x)) = T((a+c)x+(b+d))$$
$$= (b+d, a+c)$$
$$= (b,a) + (d,c)$$
$$= T(p(x)) + T(q(x))$$

$$T(\alpha p(x)) = T(\alpha a x + \alpha b)$$
$$= (\alpha b, \alpha a)$$
$$= \alpha(b,a) = \alpha T(p(x)).$$

—— // ——

b) $\alpha = \{1, x\}$ base canônica de $P_1(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^2$.

$$T(1) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$
$$T(x) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—— // ——

e) $N(T) = \{ax+b \in P_1(\mathbb{R}) : T(ax+b) = (0,0)\}$
$= \{ax+b \in P_1(\mathbb{R}) : (b,a) = (0,0)\}$
$= \{0\}$ → polinômio nulo.

—— // ——

d) Pelo item c) temos que T é injetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos:

$$\dim P_1(\mathbb{R}) = \dim N(T) + \dim Im(T)$$
$$2 = 0 + \dim Im(T).$$

Logo, $\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ e, portanto T é sobrejetora. Assim, T é um isomorfismo.

Temos que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí

$T^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P_1(\mathbb{R})$ é tal que

$$[T^{-1}(a,b)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$[T^{-1}(a,b)] = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}(a,b) = a \cdot 1 + b \cdot x$$
$$T^{-1}(a,b) = bx + a.$$

Questão 3:

a) Polinômio característico

$$p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda I)$$
$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Autovalores:

$p_T(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$

Autovalores: 1, 2, 3

Autovetores:

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ -2x+2z=0 \Rightarrow \boxed{x=z} \end{cases}$$

$$-x+y+x=0 \Rightarrow y=0$$

Autovetores: $(x,0,x)$, $x \neq 0$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x=0 \\ -x+z=0 \quad \boxed{x=0=z} \\ -2x+z=0 \end{cases}$$

Autovetores: $(0,y,0)$, $y \neq 0$.

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$x = 0$

$\Rightarrow y = z$

Autovetores: $(0, y, y)$, $y \neq 0$

—————— // ——————

b) Como o operador linear é de um espaço de dimensão 3 e existem 3 autovalores distintos, então T é diagonalizável.

$\alpha = \{(1,0,2), (0,2,0), (0,1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores e

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

—————— // ——————

Questão 4:

a) F

Note que, pelo teorema do núcleo e da imagem, se T fosse injetora, teríamos

$$\dim \mathbb{R}^5 = \dim N(T) + \dim Im(T)$$
$$5 = 0 + \dim Im(T).$$

Logo, $\dim Im(T) = 5$, mas

$$\dim Im(T) \leq 4 = \dim M_2(\mathbb{R}).$$

b) $T(1,0) = (0,5)$ $\quad [T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$T(0,1) = (-1,6)$

V

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$p_T(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$
$$\iff \lambda = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$\iff \lambda = 5 \text{ ou } \lambda = 1$$

Portanto, T possui dois autovalores distintos e é um operador em um espaço de dimensão 2. Logo T é diagonalizável.

——— // ———

e) V

De fato, podemos definir, por exemplo,

$$T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Note que,

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Logo, T é injetora. E pelo teorema do núcleo e da imagem

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = \dim N(T) + \dim Im(T) \Rightarrow$$

$$4 = 0 + \dim Im(T)$$

Logo,

$\dim Im\, T = 4 = \dim P_3(\mathbb{R})$.

Portanto, T é sobrejetora e consequentemente é bijetora.

—— // ——

d) Pelo Teorema do núcleo e da imagem

$\dim U = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

Se $\dim U > \dim V$ então

$\dim N(T) + \dim Im(T) > \dim V$. $(*)$

Como $\dim Im(T) \leq \dim V$, para que $(*)$ seja satisfeita, devemos ter

$$\dim N(T) > 0$$

e portanto, T não é injetora.

—— // ——