Prova 1 - Álgebra Linear - 19/12/2024

Questão 1:

a) Note que, por definição $W \subset V$. Além disso, para $a = b = 0$, temos que $(0,0,0) \in W$ e, portanto $W \neq \emptyset$.

Sejam $u = (a,0,b)$, $v = (x,0,y) \in W$ e $k \in \mathbb{R}$. Daí

- $u + v = (a,0,b) + (x,0,y) = (a+x, 0, b+y) \in W$
- $k \cdot u = k(a,0,b) = (ka, 0, kb) \in W$

Portanto, W é subespaço de V.

//

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Observe que, $A, B \in W$, pois $\det A = 0$ e $\det B = 0$, mas $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e daí $\det(A+B) = 1$.

Logo, $A + B \notin W$. Portanto, W não é subespaço vetorial de V.

//

Questão 2:

Note que,

$$U+V=\{(x,y,0)+(z,z,z): x,y,z\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(x+z,y+z,z): x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

Dado $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, observe que para $z=c$, $y=b-c$ e $x=a-c$, temos que $(a,b,c)\in U+V$. Logo, $U+V=\mathbb{R}^3$.

E ainda,

$$U\cap V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \underbrace{z=0}_{\text{condição de } U} \text{ e } \underbrace{x=y=z}_{\text{condição de } V}\}$$

Logo, $U\cap V=\{(0,0,0)\}$ e então a soma $U+V$ é direta. Portanto, $\mathbb{R}^3=U\oplus V$.

Questão 3:

$$W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y-2z=0\}$$

$$x+y-2z=0 \Rightarrow x=2z-y$$

$$W_1=\{(2z-y,y,z): y,z\in\mathbb{R}\}$$

$W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0\}$

$y+z=0 \Rightarrow y=-z$

$W_2 = \{(x,-z,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$

a) $W_1 = \{z(2,0,1) + y(-1,1,0) : z,y \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (2,0,1), (-1,1,0) \rangle$

$S = \{(2,0,1), (-1,1,0)\}$ é um conjunto gerador para W_1 e como os vetores não são múltiplo escalar um do outro, S é um conjunto linearmente independente, e portanto, S é base de W_1. Logo $\dim W_1 = 2$.

—— // ——

b) $W_2 = \{x(1,0,0) + z(0,-1,1) : x,z \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1,0,0), (0,-1,1) \rangle$

$B = \{(1,0,0), (0,-1,1)\}$ é um conjunto gerador para W_2 e como os vetores não são múltiplo escalar um do outro, B é um conjunto linearmente independente, e portanto, B é base de W_2. Logo $\dim W_2 = 2$.

—— // ——

c) $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z=0 \text{ e } y+z=0\}$

$$\begin{cases} x+y-2z=0 & \Rightarrow x-z-2z=0 \Rightarrow x=3z \\ y+z=0 & \Rightarrow y=-z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{(3z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(3,-1,1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3,-1,1) \rangle \end{aligned}$$

Logo, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$

—— // ——

d) Pelo Teorema,

$$\begin{aligned} \dim(W_1+W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ &= 2 + 2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

—— // ——

e) Como W_1+W_2 é subespaço de V e como

$\dim(W_1+W_2) = 3 = \dim V$,

então $W_1+W_2 = \mathbb{R}^3$.

Mas W_1+W_2 não é soma direta, já que

$W_1 \cap W_2 = \langle (3,-1,1) \rangle \neq \{(0,0,0)\}$

—— // ——

Questão 4:

a) $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ 2x-y+w=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=2y-2x$
$\Rightarrow w=y-2x$

$U=\{(x,y,2y-2x,y-2x): x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{(x,0,-2x,-2x)+(0,y,2y,y): x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,0,-2,-2)+y(0,1,2,1): x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\langle(1,0,-2,-2),(0,1,2,1)\rangle$

Note que, o conjunto $S=\{(1,0,-2,-2),(0,1,2,1)\}$ gera U e é LI, já que um vetor não é múltiplo escalar do outro.
Portanto, S é base de U e $\dim U=2$.

//

b) $\begin{cases} 3x-3y+z=0 \\ y+w=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=3y-3x$
$\Rightarrow w=-y$

$W=\{(x,y,3y-3x,-y): x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{(x,0,-3x,0)+(0,y,3y,-y): x,y\in\mathbb{R}\}$
$=\{x(1,0,-3,0)+y(0,1,3,-1): x,y\in\mathbb{R}\}$

$= \langle (1,0,-3,0), (0,1,3,-1) \rangle$

Note que, $B = \{(1,0,-3,0), (0,1,3,-1)\}$ é um conjunto gerador de W e ainda é LI, já que um vetor não é múltiplo escalar do outro. Logo, B é base de W e então $\dim W = 2$

//

e) $U \cap W$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 & (i) \\ 2x - y + w = 0 & (ii) \\ 3x - 3y + z = 0 & (iii) \\ y + w = 0 & (iv) \end{cases} \Rightarrow \boxed{w = -y}$$

De (ii) temos

$$2x - y + w = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x = y}$$

De (i), se $x = y$, então $\boxed{z = 0}$

Logo, temos $x = y = -w$ e $z = 0$.

Daí,

$$U \cap W = \{(-w,-w,0,w) : w \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{w(-1,-1,0,1) : w \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (-1,-1,0,1) \rangle$$

O conjunto $A = \{(-1,-1,0,1)\}$ é base de $U \cap W$, pois gera o espaço e é LI, já que é um conjunto unitário formado por um vetor não nulo.

Portanto, $\dim U \cap W = 1$.

//

Questão 5:

$\mathbb{R}^2$ com as operações dadas não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, pois note que,

$u = (1,1)$, $v = (2,2)$ são elementos de $\mathbb{R}^2$ e

$u + v = (1+2, 1-2) = (3,-1)$,

mas

$v + u = (2+1, 2-1) = (3,1)$, isto é

$u + v \neq v + u$ e portanto não vale a comutatividade.

//

Questão 6:

a) F, pois $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$

——— // ———

b) F, pois dim $\mathbb{R}^3 = 3$, logo qualquer conjunto com mais que 3 vetores é LD.

——— // ———

c) F.

Considere por exemplo, o conjunto $S = \{(1,1), (2,2)\}$.

S tem 2 vetores, mas S não é base de $\mathbb{R}^2$, já que o conjunto é LD, uma vez que um vetor é múltiplo escalar do outro

$(2,2) = 2(1,1)$.

——— // ———