Prova 1. Álgebra I - 16/05/2023

Questão 1:

Seja n o número de degraus da escada.
Pelo enunciado sabemos que n é múltiplo de 7, ímpar e $40 < n < 100$.
Então, temos que:

$$n \in \{49, 63, 77, 91\} \quad *$$

E ainda, n é da forma $n = 3q + 2$, isto é, n é um número que ao dividirmos por 3 deixa resto 2.
Portanto, dentre as possibilidades listadas em (*) concluímos que

$$n = 77$$

—— // ——

Questão 2:

a) $\bar{a}$ é inversível em $\mathbb{Z}_m \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z} : \bar{a}\bar{x} = \bar{1}$

$\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z} : ax \equiv 1 \pmod{m}$

$\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z} : m \mid ax - 1$

$$\iff \exists\, x, y \in \mathbb{Z}: \ ax - 1 = my$$

$$\iff \exists\, x, y \in \mathbb{Z}: \ ax - my = 1$$

$$\iff mdc(a, -m) = 1$$

$$\iff mdc(a, m) = 1$$

b) Basta verificar se $mdc(7297, 3640)$ é 1. Utilizando o algoritmo de Euclides, temos:

$$7297 = 2 \cdot 3640 + 17$$

$$3640 = 214 \cdot 17 + 2$$

$$17 = 8 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1.$$

Portanto, $mdc(7297, 3640) = 1$ e pelo item (a) segue que $\overline{3640}$ é inversível em $\mathbb{Z}_{7297}$.

Questão 3:

Mostremos que não é possível formar uma PA, não constante, somente com números primos.

Observe que, se o primeiro termo de uma PA é um número primo, isto é, $a_1 = p$, com p primo, temos que o $(p+1)$-ésimo termo da PA será

$$a_{p+1} = a_1 + (p+1-1)r$$
$$= p + pr$$
$$= p(1+r)$$

que não é um número primo, já que é divisível por p e $(1+r)$.

—— // ——

Questão 4:

$$mdc(a, bc) = 1 \Leftrightarrow mdc(a,b) = mdc(a,c) = 1$$

$(\Rightarrow)$ $mdc(a, bc) = 1 \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{Z} :$
$$ax + bcy = 1$$

Ou seja, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$ax + b(cy) = 1$ e $ax + c(by) = 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$mdc(a,b) = 1$ $mdc(a,c) = 1$

($\Leftarrow$) Por hipótese, $mdc(a,b)=1$ e

$mdc(a,c)=1$.

Pela Identidade de Bezout, existem $x, y, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1$$
$$ax_0 + cy_0 = 1$$

Multiplicando a primeira equação por c e a segunda por b, temos

(1) $acx + bcy = c$

(2) $abx_0 + bcy_0 = b$

Agora seja $d = mdc(a, bc)$, ou seja, $d \mid a$ e $d \mid bc$.

Daí, de (1) temos que $d \mid c$ e de (2) temos $d \mid b$.

Logo

$d \mid a$ e $d \mid c \Rightarrow d \mid mdc(a,c)$

$\Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$

$d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow d \mid mdc(a,b)$

$\Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$

$\therefore$ $mdc(a, bc) = 1$.

—————— // ——————

Questão 5:

Note que

$13 = 2^2 + 3^2$

Daí

$2^2 + 3^2 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 2^2 \equiv -3^2 \pmod{13}$

$\Rightarrow (2^2)^{35} \equiv (-3^2)^{35} \pmod{13}$

$\Rightarrow 2^{70} \equiv -3^{70} \pmod{13}$

$\Rightarrow 2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$

$\Rightarrow 13 \mid 2^{70} + 3^{70}$

—————— // ——————

Questão 6:

$m = 2^6 . 3^3 . 5^2$, $n = 2^r . 3^s . 5^t$, $p = 2^5 . 5^4$.

a) Os divisores de m são da forma

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$,

com $0 \leq b_1 \leq 6$, $0 \leq b_2 \leq 3$, $0 \leq b_3 \leq 2$.

Como queremos determinar as possibilidades para que b ainda seja múltiplo de $100 = 2^2 \cdot 5^2$, temos que

$2 \leq b_1 \leq 6$, $0 \leq b_2 \leq 3$ e $b_3 = 2$.

Isto é, temos

$5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$ possíveis divisores.

b) Como queremos que $n | p$ e $n | m$, temos que em n deve aparecer apenas fatores em comum entre m e p. Logo

$0 \leq r \leq 5$; $s = 0$; $0 \leq t \leq 2$.

Questão 7: Sejam a e b dois naturais não nulos tais que $a + b = p$, com

p primo.

Seja $d = mdc(a,b)$, logo $d|a$ e $d|b$,
daí

$d | a+b \Rightarrow d | p$

Então, $d = p$ ou $d = 1$.

Se $d=p$ então $p|a$ e $p|b$ e como
$a>0$, $b>0$ então $a+b$ será
maior ou igual que $2p$, um absurdo.
Logo, $d=1$, isto é, $mdc(a,b) = 1$ e
então a e b são primos entre si.

—— // ——

Questão 8:

$$7 | (3^{2n+1} + 2^{n+2}), \quad n \geq 0$$

- Para $n=0$, temos

$3^{2.0+1} + 2^{0+2} = 7$ e $7|7$,
então temos nossa base de indução.

• HI: suponha por hipótese de indução que
$$7 \mid 3^{2k+1} + 2^{k+2}.$$

• Para $n = k+1$, temos

$$3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 3^{2k+1+2} + 2^{k+2+1}$$
$$= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$
$$= (7+2) \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$
$$= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$
$$= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \underbrace{\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right)}_{H.I}$$
$$= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 7q$$
$$= 7 \left(3^{2k+1} + 2 \cdot q\right)$$

Portanto, $7 \mid 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2}$

Segue por indução, que o resultado é válido para todo $n \geq 0$.

—— // ——

Questão 9:

a) Se a é não é divisível por 3,

temos duas possibilidades

$a = 3q+1$ ou $a = 3q+2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$a^2 = (3q+1)^2 = 9q^2+6q+1 = 3(3q^2+2q)+1$$

$$a^2 = 9q^2+12q+4 = 3(3q^2+4q+1)+1$$

Portanto, em qualquer uma das possibilidades a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

—————— // ——————

b) Sejam a e b inteiros tais que

$$3 \mid a^2+b^2.$$

Suponha que a e b não sejam divisíveis por 3. Pelo item (a) temos que

$a^2 = 3q+1$ e $b^2 = 3k+1$,

logo $a^2+b^2 = 3m+2$.

Um absurdo, já que por hipótese
$3 \mid a^2+b^2$.

Portanto, a e b são divisíveis por 3.

—— // ——