UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof^{o}.** ***Victor Martins***

Lista 4: Divisão euclidiana

(1) Sejam a e b inteiros quaisquer. Mostre que:

(a) se $a|b$, então $a|(-b)$;

(b) se $a|b$ e $a|(b+c)$, então $a|c$;

(c) se $a|b$ então $a|rb$ para qualquer inteiro r;

(d) se $a|b$ e $a \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.

(2) Mostre que, se $a|(2x-3y)$ e $a|(4x-5y)$, então $a|y$.

(3) Na divisão euclidiana do inteiro $a = 427$ por um inteiro positivo b, o quociente é 12 e o resto é r. Encontre os valores de b e r.

(4) Dê uma definição de número inteiro **par** e de número inteiro **ímpar** utilizando o algoritmo da divisão.

(5) Utilizando o algoritmo da divisão, mostre as afirmações a seguir:

(a) A soma de dois inteiros pares é um inteiro par.

(b) A soma de dois inteiros ímpares é um inteiro par.

(c) A soma entre um inteiro par e um inteiro ímpar é um inteiro ímpar.

(6) Utilizando indução, mostre que $24|n(n^2-1)(3n+2)$ para todo n natural.

(7) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ temos:

(a) $7|(2^{3n}-1)$

(b) $2|(3^n-1)$

(8) Mostre que o quadrado de qualquer número inteiro ímpar é da forma $8k+1$, com k inteiro.

(9) Mostre que, se m e n são inteiros ímpares, então $8|(m^2+n^2-2)$.

(10) Seja a inteiro. Mostre que, na divisão de a^2 por 8, os restos possíveis são $0, 1$ ou 4.

(11) Determine os inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente.

(12) Se m e n forem inteiros ímpares, mostre que $m^2 - n^2$ é divisível por 8.

(13) Mostre que, para todo natural j, 10^j pode ser escrito na forma $9b_j + 1$, para algum b_j natural.

(14) Mostre que, para todo natural j, 10^j pode ser escrito na forma $11c_j + (-1)^j$, para algum c_j natural.

(15) Mostre que um número natural $a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ é divisível por 11 se, e somente se, a soma alternada dos seus algarismos

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

for divisível por 11.

(16) Enuncie e prove um critério de divisibilidade por 3.

(17) Enuncie e prove um critério de divisibilidade por 5.

(18) Enuncie e prove um critério de divisibilidade por 4.

(19) Mostre que todo inteiro ímpar pode ser escrito como diferença de dois quadrados.

(20) Mostre que, dados três inteiros consecutivos, um deles é múltiplo de 3.

(21) Sejam a e b inteiros com $b > 0$. Mostre que, dentre os números $a, a+1, a+2, \ldots, a+b-1$, um e apenas um deles é múltiplo de b. Em outras palavras, um conjunto de b inteiros consecutivos contém exatamente um múltiplo de b.

(22) Sejam a, b e m inteiros com $m \neq 0$. Mostre que, se $m | (b - a)$, então a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m.

(23) Mostre que todo número com três algarismos, todos eles iguais, é divisível por 37.