UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

MATERIAL DE APOIO

Tutoria em álgebra linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Material elaborado por:

Prof. Victor do Nascimento Martins - DMPA
Coordenador do projeto

Betânia Almeida Lopes
(licencianda em matemática - UFES/campus de Alegre)

Thiago Araújo Dantas
(licenciando em física - UFES/campus de Alegre)

ALEGRE - ES
SETEMBRO/2020

Sumário

Introdução

Este material foi desenvolvido com o objetivo de servir de suporte as atividades do projeto de ensino *Tutoria em álgebra linear* no campus de Alegre da Universidade Federal do Espírito Santo a partir de 2020.

Com o programa REUNI, as vagas nas universidades federais cresceram, logo o acesso a universidade foi ampliado, mas isso escancarou um grande problema da educação brasileira. A formação básica, em especial em matemática, dos alunos está cada vez mais precária. Portanto temos mais alunos entrando na universidade mas com formações mais precárias, consequentemente um grande número destes alunos ficam retidos em disciplinas do início do curso. Em particular, em álgebra linear. Em geral, um curso básico da disciplina serve de pré requisito para outras disciplinas nos cursos, portanto o não entendimento da disciplina e consequentemente a não aprovação resulta em uma estagnação do estudante em sua graduação. Neste sentido, o projeto em questão visa trabalhar em conjunto com o professor da disciplina a fim de criar ferramentas que possam auxiliar neste processo de ensino-aprendizagem tanto em relação a como o aluno estuda os conteúdos quanto em relação a como o professor estrutura sua disciplina.

Em um primeiro momento nos inspiramos no já bem-sucedido Programa de Tutoria nas Ciências Básicas da Universidade Federal de Viçosa. Atualmente, o programa da UFV já está em seu décimo nono ano e os resultados são bastantes expressivos. Basicamente, o programa consiste em tutorias para grupos pequenos de estudantes (de 5 a 6 alunos) sobre tópicos relacionados a uma disciplina da grade dos mesmos, por exemplo, álgebra linear ou cálculo. Um primeiro problema que poderemos encontrar em nosso projeto é, que, diferente da UFV, não possuímos ferramentas institucionais legais para obrigar a participação dos alunos. Nossa alternativa será trabalhar em conjunto com o professor da disciplina que poderá incorporar as atividades da tutoria na sua avaliação final da disciplina. Ao trabalharmos com o professor da disciplina, iremos propor ideias semelhantes àquelas utilizadas no Método 300 na UnB pelo professor Fragelli. O método em questão trata-se de uma metodologia ativa e colaborativa utilizada pelo professor no ensino do cálculo diferencial e integral. Basicamente, a proposta é dividir os estudantes de uma turma em grupos e estes grupos terão metas (tarefas) a serem executadas durante o semestre. A colaboração entre os estudantes de um mesmo grupo é o tempo todo incentivada, e, talvez, essa seja a chave do sucesso do método. Basicamente, estamos mesclando ideias da tutoria da UFV com o Método 300 da UnB para propormos algo novo para nossa realidade acadêmica. E como motivação inicial, já temos comprovado os sucessos dos dois programas citados.

O material que apresentamos é composto de tópicos selecionados de um primeiro curso em álgebra linear. A ideia deste material é preparar os alunos para um melhor acompanhamento das atividades da disciplina. Sendo assim, escolhemos alguns tópicos chaves dentro da disciplina para serem trabalhados no projeto. Fizemos uma divisão em 12 módulos e cada módulo traz um breve resumo do conteúdo, seguido de exemplos mais detalhados e alguns exercícios para fixação. A proposta inicial do projeto é utilizar cada módulo como tema de uma sessão de tutoria e dentro de cada sessão aprofundar o quanto for possível em tal tema. Cada sessão de tutoria compreenderá em uma exposição de 2h dos tutores para grupos de no máximo 10 alunos pré selecionados.

Os módulos aqui apresentados com seus conteúdos e objetivos específicos são listados a seguir:

(1) **Espaço vetorial real**
Ementa: Definição e exemplos de espaços vetoriais reais
Objetivos: Aprender a verificar se um dado conjunto é ou não um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Caso não seja, saber indicar a(s) propriedades de espaço vetorial que não são satisfeitas pelo conjunto dado.

(2) **Matrizes - Parte I**
Ementa: Definição, ordem, notação e exemplos de matrizes; tipos especiais de matrizes (matrizes quadrada, nula, linha, coluna, diagonal, identidade, triangular, simétrica e antissimétrica); adição de matrizes e propriedades; multiplicação por escalar e propriedades.
Objetivos: Assimilar o conceito de matrizes e suas principais propriedades. Compreender que o conjunto das matrizes é um exemplo de espaço vetorial.

(3) **Matrizes - Parte II**
Ementa: Multiplicação de matrizes; transposição de matrizes; matrizes inversas.
Objetivos: Entender a operação de multiplicação de matrizes e utilizá-la para entendimento e determinação de inversas de matrizes.

(4) **Sistemas lineares**
Ementa: Definição, exemplos de sistemas lineares e classificação quanto a solução; matriz de um sistema; método de Gauss (escalonamento); método da matriz inversa.
Objetivos: Saber utilizar o método de Gauss para determinar a solução de um sistema linear e classificar um sistema linear de acordo com sua solução.

(5) **Determinantes**
Ementa: Definição, exemplos e propriedades de determinantes de uma matriz.
Objetivos: Entender os métodos de determinação do determinante de uma matriz e saber utilizar suas propriedades na resolução de problemas.

(6) **Subespaços vetoriais - Parte I**
Ementa: Definição e exemplos de subespaços vetorias; subespaços vetoriais triviais.
Objetivos: Saber verificar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial.

(7) **Subespaços vetoriais - Parte II**
Ementa: Operações com subespaços vetoriais; intersecção e soma de subespaços; subespaço vetorial gerado; espaços vetoriais finitamente gerados.
Objetivos: Entender as principais operações que podem ser realizadas entre subespaços vetoriais.

(8) **Dependência e independência linear**
Ementa: Combinações lineares; conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes.
Objetivos: Saber verificar se um dado conjunto de vetores em um espaço vetorial é l.i. ou l.d., bem como compreender qual o significado dessas classificações e como utilizá-las em demonstrações.

(9) **Base e dimensão**
Ementa: Definição e exemplos de base de um espaço vetorial; dimensão de um espaço vetorial.
Objetivos: Comprender procedimentos para determinar a base de um espaço vetorial. Saber verificar se um dado conjunto é ou não uma base de um dado espaço vetorial.

(10) **Transformações lineares - Parte I**
Ementa: Definição e exemplos de transformações lineares; núcleo e imagem de uma transformação linear; teorema do núcleo e da imagem; isomorfismo
Objetivos: Aprender a provar que uma dada aplicação é uma transformação linear e calcular seu núcleo e imagem. Entender como se usa o teorema do núcleo e da imagem em demonstrações.

(11) **Transformações lineares - Parte II**
Ementa: Matriz de uma transformação linear; operações com transformações lineares;

operadores lineares.
Objetivos: Determinar a matriz de uma transformação linear e utilizá-la na resolução de problemas envolvendo transformações lineares.

(12) **Autovalores e autovetores**
Ementa: Autovalores e autovetores; polinômio característico; diagonalização de operadores.
Objetivos: Calcular os autovalores e autovetores de um operador linear dado e compreender a utilização destes na diagonalização de operadores.

Além deste material ser utilizado nas atividades do projeto, ele estará disponível para todos os estudantes da disciplina para que possam utilizá-lo como material consultivo e até mesmo para praticarem os conteúdos vistos em aula através dos exercícios aqui propostos. Apenas reforçamos que trata-se de um material introdutório que tem como principal objetivo facilitar a compreensão dos estudantes nas atividades regulares da disciplina, logo, de maneira alguma, este material e/ou as atividades desenvolvidas no projeto são equivalentes ao curso regular de álgebra linear. Para referências completas para o curso, sugerimos uma consulta as referências bibliográficas apresentadas no fim deste material.

1

Módulo 1: Espaço vetorial real

Ementa: Definição e exemplos de espaços vetoriais reais
Objetivos: Aprender a verificar se um dado conjunto é ou não um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Caso não seja, saber indicar as propriedades de espaço vetorial que não são satisfeitas pelo conjunto dado.

Um conjunto não vazio V será dito um **espaço vetorial real** (ou um $\mathbb{R}$ **- espaço vetorial**) se estiverem definidas uma adição em V e uma multiplicação por escalar de $\mathbb{R}$ em V:

$$\begin{array}{rccc} +: & V \times V & \to & V \\ & (u,v) & \mapsto & u+v \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (a,v) & \mapsto & a \cdot v \end{array}$$

satisfazendo:

(A1) A adição é associativa, isto é,

$$(u+v)+w = u+(v+w), \quad \forall\ u,v,w \in V.$$

(A2) A adição é comutativa, isto é,

$$u+v = v+u, \quad \forall\ u,v \in V.$$

(A3) A adição possui **elemento neutro**, ou seja, existe $0 \in V$, tal que, dado $u \in V$, $u+0=u$.

(A4) A adição possui **elementos simétricos**, ou seja, para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que

$$u+(-u)=0.$$

(ME1) $a(u+v) = au + av, \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\ u, v \in V.$

(ME2) $(a+b)u = au + bu, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME3) $(a \cdot b)u = a(bu), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},\ u \in V.$

(ME4) $1 \cdot u = u, \quad \forall\, u \in V.$

Os elementos de V serão chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{R}$ de **escalares**. O elemento $0 \in V$ será chamado de **vetor nulo** e o elemento $-v \in V$ de **vetor oposto** de v.

1.1 Propriedades dos espaços vetoriais

Segue da definição de um espaço vetorial V, as seguintes propriedades:

- O elemento neutro da adição em V é único;
- Dado um vetor $v \in V$, o simétrico $-v$ de v é único;
- O simétrico de $-v \in V$ é v, isto é, $-(-v) = v$;
- Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$ então $u = v$;
- Para todo $v \in V$, $0 \cdot v = 0 \in V$;
- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e tomando o elemento neutro $0 \in V$, $\alpha \cdot 0 = 0 \in V$;
- Se $\alpha \cdot v = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, então $\alpha = 0$ ou $v = 0$;
- Para todo $v \in V$, $(-1) \cdot v = -v$.

1.2 Exemplos

Exemplo 1.1 *Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 5x\}$ com as operações de adição e multiplicação usuais de $\mathbb{R}^2$. Vamos verificar que V é espaço vetorial real.*

Para verificarmos se V é espaço vetorial real, temos que verificar se as condições vistas acima são válidas. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, 5x_1)$, $\vec{v} = (x_2, 5x_2)$ e $\vec{w} = (x_3, 5x_3)$.

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(x_1, 5x_1) + (x_2, 5x_2)] + (x_3, 5x_3) = (x_1 + x_2, 5x_1 + 5x_2) + (x_3, 5x_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3, 5x_1 + 5x_2 + 5x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 5(x_1 + x_2 + x_3)).$

$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(x_1,5x_1)+[(x_2,5x_2)+(x_3,5x_3)]=(x_1,5x_1)+(x_2+x_3,5x_2+5x_3)$
$=(x_1+x_2+x_3,5x_1+5x_2+5x_3)=(x_1+x_2+x_3,5(x_1+x_2+x_3))$.

$\therefore (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(A2) $\vec{u}+\vec{v}=(x_1,5x_1)+(x_2,5x_2)=(x_1+x_2,5x_1+5x_2)=(x_1+x_2,5(x_1+x_2))$
$=(x_2+x_1,5(x_2+x_1))=(x_2+x_1,5x_2+5x_1)=(x_2,5x_2)+(x_1,5x_1)=\vec{v}+\vec{u}$

(A3) $0\in V$, *pois* $\vec{0}=(0,5.0)=(0,0)$.
$\vec{u}+0=(x_1,5x_1)+(0,0)=(x_1+0,5x_1+0)=(x_1+0,5(x_1+0))=(x_1,5x_1)=\vec{u}$

(A4) *Dado* $\vec{u}=(x_1,5x_1)$, *existe* $(-\vec{u})=(-x_1,-5x_1)$ *tal que:*
$\vec{u}+(-\vec{u})=(x_1,5x_1)+(-x_1,-5x_1)=(x_1,5x_1)-(x_1,5x_1)=(x_1-x_1,5x_1-5x_1)=(x_1-x_1,5(x_1-x_1))=(0,5.0)=(0,0)=\vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha[(x_1,5x_1)+(x_2,5x_2)]=\alpha(x_1+x_2,5x_1+5x_2)=\alpha(x_1+x_2,5(x_1+x_2))$
$=(\alpha(x_1+x_2),\alpha 5(x_1+x_2))=(\alpha x_1+\alpha x_2,5\alpha x_1+5\alpha x_2))=(\alpha x_1,5\alpha x_1)+(\alpha x_2,5\alpha x_2)$
$=\alpha(x_1,5x_1)+\alpha(x_2,5x_2)=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha+\beta)\vec{u}=(\alpha+\beta)(x_1,5x_1)=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)5x_1)=((\alpha+\beta)x_1,5(\alpha+\beta)x_1)$
$=(\alpha x_1+\beta x_1,5\alpha x_1+5\beta x_1)=(\alpha x_1,5\alpha x_1)+(\beta x_1,5\beta x_1)=\alpha(x_1,5x_1)+\beta(x_1,5x_1)$
$=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u}=(\alpha\beta)(x_1,5x_1)=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)5x_1)=((\alpha\beta)x_1,5(\alpha\beta)x_1)=(\alpha\beta x_1,5\alpha\beta x_1)$
$\alpha(\beta\vec{u})=\alpha(\beta(x_1,5x_1))=\alpha(\beta x_1,\beta 5x_1)=\alpha(\beta x_1,5\beta x_1)=(\alpha\beta x_1,\alpha 5\beta x_1)=(\alpha\beta x_1,5\alpha\beta x_1)$

$\therefore (\alpha\beta)\vec{u}=\alpha(\beta\vec{u})$

(ME4) $1.\vec{u}=1.(x_1,5x_1)=(1.x_1,1.5x_1)=(x_1,5x_1)=\vec{u}$

Como todas as propriedades são válidas, concluímos que V *é espaço vetorial real.*

Exemplo 1.2 *Seja* $V=\mathbb{R}^2$ *com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:*
Dados $\vec{u}=(x_1,y_1)$ *e* $\vec{v}=(x_2,y_2)$ *vetores de* $\mathbb{R}^2$ *e* $a\in\mathbb{R}$, *defina:*

- $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
- $a\vec{u}=(ax_1,y_1)$

V *com as operações definidas acima não é um espaço vetorial. De fato, dados* $\vec{u}=(1,1)\in V$ *e os escalares reais 2 e* -2, *temos que a propriedade* $(ME2)$ *não é satisfeita, já que*

$$(2+(-2))\vec{u}=0\cdot(1,1)=(0,1)$$

é diferente de

$$2\cdot\vec{u}+(-2)\cdot\vec{u}=2(1,1)+(-2)(1,1)=(2,1)+(-2,1)=(0,2).$$

Exemplo 1.3 *Seja* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, W *é espaço vetorial real?*

Note que a condição (A4) não é satisfeita, já que, por exemplo, dado $\vec{u} = (7, -1) \in W$, *temos que se existir* $\vec{v} = (x, y) \in W$ *tal que* $\vec{u} + \vec{v} = 0$, *deveríamos ter*

$$0 = \vec{u} + \vec{v} = (7, -1) + (x, y) \;\Rightarrow\; x = -7, y = 1,$$

mas $\vec{v} = (-7, 1) \notin W$. *Desta forma* W *não é um espaço vetorial real.*

Exemplo 1.4 *Seja* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ *com as operações de adição e multiplicação usuais de* $\mathbb{R}^3$.

Vamos verificar se valem as condições para V *ser espaço vetorial.*
Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w} \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $\vec{u} = (x_1, 2x_1, 3x_1), \vec{v} = (x_2, 2x_2, 3x_2)$ *e* $\vec{w} = (x_3, 2x_3, 3x_3)$.

(A1) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = [(x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2, 2x_2, 3x_2)]+(x_3, 2x_3, 3x_3) = (x_1+x_2, 2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2) + (x_3, 2x_3, 3x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 3x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2(x_1 + x_2 + x_3), 3(x_1 + x_2 + x_3))$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, 2x_1, 3x_1) + [(x_2, 2x_2, 3x_2) + (x_3, 2x_3, 3x_3)] = (x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3, 3x_2 + 3x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 3x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2(x_1 + x_2 + x_3), 3(x_1 + x_2 + x_3))$
$\therefore (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(A2) $\vec{u}+\vec{v} = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1+x_2, 2x_1+2x_2, 3x_1+3x_2) = (x_1+x_2, 2(x_1+x_2), 3(x_1 + x_2))$
$\vec{v}+\vec{u} = (x_2, 2x_2, 3x_2)+(x_1, 2x_1, 3x_1) = (x_2+x_1, 2x_2+2x_1, 3x_2+3x_1) = (x_2+x_1, 2(x_2+x_1), 3(x_2 + x_1)) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2), 3(x_1 + x_2))$
$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(A3) $\vec{0} \in V$ *e* $\vec{u}+\vec{0} = (x_1, 2x_1, 3x_1)+(0, 0, 0) = (x_1+0, 2x_1+0, 3x_1+0) = (x_1, 2x_1, 3x_1) = \vec{u}$

(A4) *Dado* $\vec{u} \in V$, *existe* $-\vec{u} = (-x_1, -2x_1, -3x_1) \in V$ *tal que* $\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, 2x_1, 3x_1) + (-x_1, -2x_1, -3x_1) = (x_1, 2x_1, 3x_1) - (x_1, 2x_1, 3x_1) = (x_1 - x_1, 2x_1 - 2x_1, 3x_1 - 3x_1) = (x_1 - x_1, 2(x_1 - x_1), 3(x_1 - x_1)) = (0, 2.0, 3.0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha[(x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2, 2x_2, 3x_2)] = \alpha(x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2, 3x_1 + 3x_2) = \alpha(x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2), 3(x_1 + x_2)) = (\alpha(x_1 + x_2), 2\alpha(x_1 + x_2), 3\alpha(x_1 + x_2))$
$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, 2\alpha x_1 + 2\alpha x_2, 3\alpha x_1 + 3\alpha x_2) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1, 3\alpha x_1) + (\alpha x_2, 2\alpha x_2, 3\alpha x_2)$
$= \alpha(x_1, 2x_1, 3x_1) + \alpha(x_2, 2x_2, 3x_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = (\alpha + \beta)(x_1, 2x_1, 3x_1) = ((\alpha + \beta)x_1, 2(\alpha + \beta)x_1, 3(\alpha + \beta)x_1)$
$= (\alpha x_1 + \beta x_1, 2\alpha x_1 + 2\beta x_1, 3\alpha x_1 + 3\beta x_1) = (\alpha x_1, 2\alpha x_1, 3\alpha x_1) + (\beta x_1, 2\beta x_1, 3\beta x_1)$
$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(x_1, 2x_1, 3x_1) = ((\alpha\beta)x_1, 2(\alpha\beta)x_1, 3(\alpha\beta)x_1) = (\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_1, 3\alpha\beta x_1)$
$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(x_1, 2x_1, 3x_1)) = \alpha(\beta x_1, 2\beta x_1, 3\beta x_1) = (\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_1, 3\alpha\beta x_1)$
$\therefore (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$.

(ME4) $1.\vec{u} = 1(x_1, 2x_1, 3x_1) = (1.x_1, 1.2x_1, 1.3x_1) = (x_1, 2x_1, 3x_1) = \vec{u}$

Como todas condições valem, V é espaço vetorial.

Exemplo 1.5 *Seja $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:*
Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1)$
- $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0)$

Observe que V com essas operações não é um espaço vetorial. De fato, dados $\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (3, -1) \in V$ a condição $(A2)$ não é satisfeita, já que

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (3, -1) = (1 + 3, 2) = (4, 2)$$

que é diferente de

$$\vec{v} + \vec{u} = (3, -1) + (1, 2) = (3 + 1, -1) = (4, -1).$$

Exemplo 1.6 *Seja $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad e \quad a + d = 0 \right\}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais em matrizes. Verifique se V é espaço vetorial.*

Vamos verificar se valem as condições para V ser espaço vetorial.
Sejam A, B e $C \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como $a + d = 0$ então $d = -a$ e assim, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$.

(A1) $(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & -a_1 + (-a_2) + (-a_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & -(a_1 + a_2 + a_3) \end{bmatrix}.$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & -a_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 & -a_2 + (-a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & -a_1 + (-a_2) + (-a_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & -(a_1 + a_2 + a_3) \end{bmatrix}.$$

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C).$

(A2) $A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix}$

$$B + A = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & -a_2 + (-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & -(a_2 + a_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix}.$$

$\therefore A + B = B + A.$

(A3) $0 \in V$.
$A + 0 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 0 & b_1 + 0 \\ c_1 + 0 & -a_1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$

(A4) Dado $A \in V$, existe $-A \in V$ tal que
$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) & b_1 + (-b_1) \\ c_1 + (-c_1) & -a_1 + (-(-a_1)) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) & b_1 + (-b_1) \\ c_1 + (-c_1) & -a_1 + a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_1 & b_1 - b_1 \\ c_1 - c_1 & -a_1 + a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ME1) $\alpha(A + B) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 + (-a_2) \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(b_1 + b_2) \\ \alpha(c_1 + c_2) & \alpha(-(a_1 + a_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & \alpha b_1 + \alpha b_2 \\ \alpha c_1 + \alpha c_2 & -\alpha a_1 + (-\alpha a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 & \alpha b_2 \\ \alpha c_2 & -\alpha a_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

(ME2) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)a_1 & (\alpha + \beta)b_1 \\ (\alpha + \beta)c_1 & -(\alpha + \beta)a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 & \alpha b_1 + \beta b_1 \\ \alpha c_1 + \beta c_1 & -\alpha a_1 + (-\beta a_1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta b_1 \\ \beta c_1 & -\beta a_1 \end{bmatrix} = \alpha A + \beta A.$$

(ME3) $(\alpha\beta)A = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_1 & (\alpha\beta)b_1 \\ (\alpha\beta)c_1 & -(\alpha\beta)a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & \alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta c_1 & -\alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$

$$\alpha(\beta A) = \alpha\left(\beta\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta b_1 \\ \beta c_1 & -\beta a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & \alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta c_1 & -\alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(ME4) $1.A = 1.\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.a_1 & 1.b_1 \\ 1.c_1 & 1.(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} = A.$

Como todas condições são válidas, V é espaço vetorial.

Exemplo 1.7 *Seja* $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad e \quad ad - bc = 0\right\}$. *Observe que V não é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar. De fato, sejam $A, B \in V$, com* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Note que $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $A + B \notin V$, *pois*

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$ *com isso,* $a.d \neq b.c$

1.3 Exercícios

Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais.

(1) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^3$.

(2) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - w = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(3) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(4) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$, com as operações usuais de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

(5) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$.
Multiplicação: $\alpha(x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$.

(6) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$.
Multiplicação: $\alpha(x, y) = (3\alpha x, -\alpha x)$.

(7) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = x, z = w^2\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(8) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Multiplicação: $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2)$.

(9) $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$, com as operações usuais de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

(10) $V = \mathbb{R}^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:
Adição: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$.

Multiplicação: $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.

2

Módulo 2: Matrizes - Parte I

Ementa: Definição, ordem, notação e exemplos de matrizes; tipos especiais de matrizes (matrizes quadrada, nula, linha, coluna, diagonal, identidade, triangular, simétrica e antissimétrica); adição de matrizes e propriedades; multiplicação por escalar e propriedades.
Objetivos: Assimilar o conceito de matrizes e suas principais propriedades. Compreender que o conjunto das matrizes é um exemplo de espaço vetorial.

Dados dois números inteiros positivos m e n, chamamos **matriz de ordem** $m \times n$ (lê-se "matriz m por n") uma tabela formada por $m \cdot n$ números dispostos em m linhas e n colunas. Indicamos um elemento da linha i e coluna j por a_{ij}. Dessa forma, a matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$ pode ser denotada por $\mathbf{A}_{m\times n}$ ou $(a_{ij})_{m\times n}$ ou simplesmente (a_{ij}).

Exemplo 2.1 *Abaixo vemos um exemplo de uma matriz arbitrária* $\mathbf{A}$ *de ordem* $m \times n$ *e outra matriz* $\boldsymbol{B}$ *de ordem* 3×5*:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 25 & -3 \\ 26 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 4 & -100 & 8 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

2.1 Tipos especiais de matrizes

- **Matriz quadrada:** é toda matriz em que o número de linhas é igual o número de colunas, isto é, $m = n$. Neste caso dizemos que a matriz tem ordem n.

Exemplo: Abaixo temos uma matriz quadrada **C** de ordem 3

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz nula:** é toda matriz tal que todas as suas entradas são nulas, isto é $a_{ij} = 0$ para todos i, j. A indicamos por $0_{m\times n}$.

  Exemplos:

$$\mathbf{0_{2\times 2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0_{3\times 3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz coluna:** é toda matriz que possui uma única coluna

  Exemplos:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{4\times 1} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

- **Matriz linha:** é toda matriz que possui uma única linha

  Exemplos:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 4} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

- **Matriz diagonal:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

  Exemplo:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz identidade:** é uma matriz quadrada e diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$. A matriz identidade de ordem n é denotada por I_n.

Exemplos:

$$\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz triangular superior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Exemplos:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz triangular inferior:** é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Exemplos:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz simétrica:** é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$, para todos i, j.

Exemplos:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz antissimétrica:** é toda matriz quadrada onde $a_{ij} = -a_{ji}$, para todos i, j.

Exemplo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2.2 Operações com matrizes

2.2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, chamamos de **soma** das matrizes **A** e **B** a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 2.2 *Dadas as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *abaixo, vamos determinar* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Solução:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

2.2.2 Multiplicação por escalar

Dados uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, chamamos de **multiplicação de A pelo escalar** k a matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, onde $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Exemplo 2.3 *Dada a matriz* $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -1 & 10 & 20 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$. *Vamos determinar* $5{\cdot}\mathbf{C}$.

Solução:

$$\mathbf{5}\cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 & 5 \\ -1 & 10 & 20 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -35 & 25 \\ -5 & 50 & 100 \\ 30 & 20 & 15 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2.2.3 Propriedades

Dadas as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ de ordem $m \times n$ e os números reais a, b, as seguintes propiedades envolvendo adição de matrizes e multiplicação por escalar são satisfeitas:

(A1) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (associatividade);

(A2) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ (comutatividade);

(A3) $\mathbf{A}+0_{m\times n} = \mathbf{A}$ (elemento neutro);

(A4) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = 0_{m\times n}$ (elemento oposto);

(ME1) $a\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = a\cdot\mathbf{A}+a\cdot\mathbf{B}$;

(ME2) $(a+b)\cdot\mathbf{A} = a\cdot\mathbf{A}+b\cdot\mathbf{A}$;

(ME3) $(a\cdot b)\cdot\mathbf{A} = a\cdot(b\cdot\mathbf{A})$;

(ME4) $1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$;

(ME5) $0\cdot\mathbf{A} = 0_{m\times n}$.

2.3 Exercícios

(1) Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -8 & 20 & 10 \\ 6 & 20 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determine:

(a) A ordem de $\mathbf{A}$;

(b) Os elementos a_{23}, a_{42}, a_{32} e a_{24};

(c) A matriz $\mathbf{A}$ pode ser classificada como algum tipo especial de matriz? Se a resposta for sim, qual seria essa classificação?

(2) Classifique as matrizes abaixo em algum dos tipos de matrizes especiais vistos:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 70 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -13 \\ 25 \\ 32 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 87 \\ -87 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Determine em cada um dos casos abaixo, x, y, e z números reais tais que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam simétricas.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & x \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & x+2 & 5 \\ 8 & 20 & y-35 \\ z+1 & 7z & -14 \end{pmatrix}$

(4) Considere as matrizes $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ com respectivas ordens,$4 \times 4, 3 \times 4, 4 \times 3, 4 \times 4, 3 \times 4$. Determine quais das serguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$;

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{D}$;

(c) $\mathbf{B} + \mathbf{C}$;

(d) $\mathbf{B} + \mathbf{E}$

(5) Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 80 & 200 & 95 \\ -59 & 28 & 32 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 61 \\ 79 & 25 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 13 & 66 & 129 \\ 79 & 25 & 3 \end{pmatrix}$$

Quando possível, calcule o que se pede.

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{B} + \mathbf{D}$

(d) $\mathbf{D} + 0_{2\times 3}$

(6) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 165 & 198 & -64 & 964 \\ 81 & -9 & 16 & 25 \\ -42 & 54 & 345 & -54 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 254 & -19 & 46 & 469 \\ -18 & 23 & 387 & 426 \\ 4259 & 22 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 2B$.

(7) Determine a, b e c, para que se tenha $\mathbf{0_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 \\ a+3c & -b \\ -2b & 0 \end{pmatrix}$.

(8) Determine $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ para que se tenha $\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

(9) Sendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{X}$ que verifica a igualdade $3(\mathbf{X} + \mathbf{A}) = 2(\mathbf{B} + \mathbf{X}) + 5\mathbf{C}$.

3

Módulo 3: Matrizes - Parte II

Ementa: Multiplicação de matrizes; transposição de matrizes; matrizes inversas.
Objetivos: Entender a operação de multiplicação de matrizes e utilizá-la para entendimento e determinação de inversas de matrizes.

3.1 Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = (b_{jk})_{n \times p}$, chamamos de **produto** de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ a matriz $\mathbf{C} = (c_{ik})_{m \times p}$, onde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Exemplo 3.1 *Dadas as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *abaixo, determine* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Solução:
Antes de realizar o produto entre as duas matrizes, note que o número de colunas de $\mathbf{A}$ *é igual ao número de linhas de* $\mathbf{B}$. *Portanto, com essa condição satisfeita pode-se realizar o produto entre as matrizes e determinar* $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Desta forma, note que a ordem de $\mathbf{C}$ *é* 3×2.

Exemplo 3.2 *Sendo as matrizes* $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}_{1\times 4}$ *e* $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2}$, *determine se possível:*

1. $\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$;
2. $\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$.

Solução:

1. *Temos que* $\mathbf{D}$ *tem quatro colunas e* $\mathbf{E}$ *tem quatro linhas, logo podemos efetuar a multiplicação.*
   $\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} (1\cdot 4)+(2\cdot 0)+(3\cdot 3)+(9\cdot 5) & (1\cdot(-1))+(2\cdot 1)+(3\cdot 7)+(9\cdot 4) \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 4+0+9+45 & -1+2+21+36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 58 \end{pmatrix}$

2. *Temos que* $\mathbf{E}$ *tem duas colunas e* $\mathbf{D}$ *uma linha, logo não podemos efetuar a multiplicação entre as duas matrizes, portanto não é possível calcular* $\mathbf{G}$.

3.1.1 Propriedades

A multiplicação de matrizes satisfaz algumas propriedades que serão listadas a seguir. Dadas as matrizes $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{n\times p}$ e $D_{p\times k}$, temos:

- $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ (elemento neutro ou identidade);
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributiva à esquerda da multiplicação);
- $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$ (distributiva à direita da multiplicação);
- $(A \cdot B) \cdot D = A \cdot (B \cdot D)$ (associatividade);
- $0_m \cdot A = 0_{m\times n}$ e $A \cdot 0_n = 0_{m\times n}$.

3.2 Transposição de matrizes

Dada uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, chamamos de **matriz transposta de A** a matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})$ de ordem $n \times m$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Indicamos a matriz transposta de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^t$.

Exemplo 3.3 *Encontre a transposta da matriz* $\mathbf{H}$.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

Solução: *Como mencionado na definição de transposição de matrizes acima, teremos que* $h_{ij} = h_{ji}$, *logo:*

$$\mathbf{H^t} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.4 *Considere as matrizes:*

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -6 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -20 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se possível, determine $\mathbf{L} = [\mathbf{I}^t + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{K}$.

Solução:
Para resolver a expressão acima, deve-se obedecer a ordem das operações, ou seja, deve-se resolver primeiro o que se encontra dentro dos colchetes e logo após o produto. Além disso, é importante se atentar para a condição que há tanto na adição de matrizes como no produto, se satisfizer as mesmas será possível definir $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}^t + \mathbf{J}] \cdot \mathbf{K} = \left[\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -20 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 13 & -14 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 8 + 7 \cdot 9 & (-2)\cdot 7 + 7 \cdot 2 \\ 13 \cdot 8 + (-14) \cdot 9 & 13 \cdot 7 + (-14) \cdot 2 \\ 0 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 0 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -16 + 63 & -14 + 14 \\ 104 - 126 & 91 - 28 \\ 0 + 27 & 0 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 0 \\ -22 & 63 \\ 27 & 6 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Propriedades

Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e o número real a, a transposição de matrizes satisfaz:

- $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- $(a \cdot A)^t = a \cdot A^t$;
- $(A \cdot B)^t = B^t A^t$;
- $(A^t)^t = A$.

Das definições de matriz simétrica e matriz antissimétrica, segue que

$$A \quad \text{é matriz simétrica} \quad \Leftrightarrow \quad A^t = A;$$

$$B \quad \text{é matriz antissimétrica} \quad \Leftrightarrow \quad B^t = -B.$$

3.3 Operações elementares com matrizes

Podemos fazer três operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

- Permutação da $i-$ésima e $j-$ésima linhas, que denotamos por $L_i \leftrightarrow L_j$.
  Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Multiplicação da $i-$ésima linha por um escalar não nulo k, que denotamos por $(L_i \to k \cdot L_i)$.
  Exemplo: $L_2 \to 2 \cdot L_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Substituição da $i-$ésima linha pela $i-$ésima linha mais k vezes a $j-$ésima linha, que denotamos por $(L_i \to L_i + k \cdot L_j)$.

Exemplo: $L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_1$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2+2\cdot 0 & 0+2\cdot 2 & 4+2\cdot(-3) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2+0 & 0+4 & 4-6 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & -8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.4 Matriz inversa

Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é **inversível (ou invertível)** se existe uma matriz B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Neste caso, dizemos que a matriz B é a **inversa** de A e a denotamos por A^{-1}.

Alguns fatos seguem direto da definição acima:

- Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $BA = I$, então A é inversível e $A^{-1} = B$;

- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem inversíveis, então AB é inversível e, além disso, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

- Nem toda matriz é inversível.

Exemplo 3.5

Dado a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, *temos que a sua inversa é* $\mathbf{M^{-1}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.4.1 Método para inversão de matrizes

Um procedimento prático para obtenção de uma matriz inversa, quando esta existir, consiste em efetuar operações elementares nas linhas de uma matriz dada até obtermos a matriz identidade. Caso isso seja possível a matriz dada é inversível e para obtermos a inversa basta aplicarmos a mesma sequência de operações elementares nas linhas da matriz identidade.

Em resumo, fazemos a sequência de operações elementares simultaneamente numa matriz A dada e na matriz identidade I de mesma ordem que A. Quando no lugar de A tivermos a matriz identidade, então no lugar de I teremos a matriz inversa de A.

$$[A \ \vdots \ I] \underbrace{\longrightarrow}_{\text{operações elementares}} [I \ \vdots \ A^{-1}]$$

Exemplo 3.6 *Verifique se* $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *é inversível.*

Solução: *Utilizando o método para inversão de matrizes mencionado acima,teremos:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to L_2 + 2\cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + 3\cdot L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to \frac{1}{9} L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2\cdot L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 12 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to L_3 - 12\cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_3 \to \frac{1}{9} L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 3\cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\therefore \mathbf{N^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.7 *Verifique se a matriz* $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ *e a matriz* $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ *são inversas entre si.*

Solução: *Para que seja verdade* $\mathbf{O} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$*, basta verificar.*

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot(-5) + 8\cdot\frac{9}{2} & 7\cdot 4 + 8\cdot -\frac{7}{2} \\ 9\cdot(-5) + 10\cdot\frac{9}{2} & 9\cdot 4 + 10\cdot -\frac{7}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -35+36 & 28-28 \\ -45+45 & 36-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

$\therefore$ **O** *e* **P** *são inversas entre si.*

Exemplo 3.8 *Verifique se a matriz* $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *é inversível.*

Solução: *Utilizando o método para inversão de matrizes, teremos:*

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 2\cdot L_1} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\therefore$ *Note que não foi possível encontra uma* $\mathbf{I}_2$ *no lugar de* $\mathbf{Q}$*, portanto não é inversível.*

3.5 Exercícios

(1) Sejam as matrizes $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \\ 16 & -10 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 0 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{Y}$ que verifica a igualdade $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

(2) Considere as matrizes:

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 20 & 9 \\ -19 & 54 & 32 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 97 & 54 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -4 & 24 & 41 \\ 65 & 25 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Quando possível, calcule o que se pede.

(a) $2\mathbf{D} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{H}$;

(b) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{E}$;

(c) $\mathbf{D} \cdot 5\mathbf{H} + \mathbf{G} \cdot (-3)\mathbf{F}$;

(d) $\mathbf{I_3} \cdot \mathbf{E}$.

(3) Sejam as matrizes $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ definidas no exercício (2), verifique as seguintes propriedades da transposta:

(a) $(\mathbf{G} + \mathbf{H})^t = \mathbf{G}^t + \mathbf{H}^t$;

(b) $(2 \cdot \mathbf{D})^t = 2 \cdot \mathbf{D}^t$;

(c) $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{F})^t = \mathbf{F}^t\mathbf{E}^t$;

(d) $(\mathbf{D}^t)^t = \mathbf{D}$.

(4) Dada a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{M^t}$ a transposta de $\mathbf{M}$, determine $\mathbf{J}$, tal que $\mathbf{J} = \mathbf{M^2} - \mathbf{M^t}$.

(5) Use o método para inversão de matrizes para determinar se as matrizes abaixo são inversíveis.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -12 \\ 6 & 0 & 4 \\ 12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) Sejam as matrizes $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, calule:

(a) $\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}$;

(b) $\mathbf{L} \cdot \mathbf{K}$;

(7) Seja a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

(a) $\mathbf{M}^{-1}$;

(b) $(\mathbf{M}^{-1})^{-1}$;

(c) $\mathbf{M}^t$;

(d) $(\mathbf{M}^t)^{-1}$;

(e) $(\mathbf{M}^{-1})^t$

(8) Seja $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 10 & x^2 \\ 2x-1 & 30 \end{pmatrix}$. Determine o valor de x, tal que $\mathbf{N} = \mathbf{N}^t$.

(9) Sejam as matrizes $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 50 & 9 \\ 13 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -3 & 19 \\ 25 & 7 \\ 69 & 5 \end{pmatrix}$ determine a matriz $\mathbf{X}$ que verifica a igualdade $\mathbf{X} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q^t}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O^{-1}})$.

(10) Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.
( ) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^t$ também será uma matriz triangular superior;
( ) Se $\mathbf{B}$ é uma matriz trinagular inferior, então $\mathbf{B}^t$ será uma matriz triangular superior;
( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica;

( )Se a primeira coluna de $\mathbf{C}$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$;
( ) Sejam as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ simétricas, então $\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{E}$;
( ) Dadas as matrizes $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, de ordem n, então $-\mathbf{G} \cdot -\mathbf{H} = -(\mathbf{G} \cdot \mathbf{H})$;
( ) Se a primeira linha de $\mathbf{I}$ for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$.

4

Módulo 4: Sistemas lineares

Ementa: Definição, exemplos de sistemas lineares e classificação quanto a solução; matriz de um sistema; método de Gauss (escalonamento); método da matriz inversa.
Objetivos: Saber utilizar o método de Gauss para determinar a solução de um sistema linear e classificar um sistema linear de acordo com sua solução.

Uma **equação linear** é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são os coeficientes reais. E um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares como o que segue

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Uma solução para o sistema (4.1) é uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais que satisfaz simultaneamente todas as equações que compõem o sistema.

De acordo com sua solução, um sistema linear pode ser classificado em:

- **Sistema compatível:** se possui solução. Se a solução for única, é dito **compatível determinado**. Se as soluções forem infinitas, é chamado **compatível indeterminado**;

- **Sistema incompatível:** se não admite solução.

Exemplo 4.1

$$\left\{\begin{array}{c} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{array}\right.$$

Solução: $x = 7$ *e* $y = 3$.

Exemplo 4.2

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 6 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solução: $x = 5z$, $y = 2 - 4z$ *e* $z = z, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.3

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Solução: $\nexists$. *O sistema é incompatível.*

4.1 Sistemas lineares e matrizes

Dado o sistema (4.1), podemos escrevê-lo na sua forma matricial da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

isto é, se chamarmos de A a matriz dos coeficientes, de X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes, temos

$$A \cdot X = B.$$

A matriz

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada a **matriz ampliada** do sistema.

4.1.1 Escalonamento de matrizes

Através de operações elementares em uma matriz é possível reduzí-la a sua forma escalonada. Fazendo isso na matriz ampliada de um sistema linear, obteremos um sistema mais simples, equivalente ao primeiro. Logo encontrar a solução deste sistema mais simples implica em encontrar a solução do sistema inicialmente proposto. Uma matriz está na sua **forma escalonada** se for nula, ou se

- o primeiro elemento não nulo de cada linha é igual a 1;
- a coluna onde ocorre o primeiro elemento não nulo de cada linha tem os outros elementos nulos;
- todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
- se o primeiro elemento não nulo da linha i acontece na coluna j então o primeiro elemento não nulo da linha $i+1$ aparece na coluna $k > j$.

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \square & 0 & \square & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \square & \cdots \\ & & \ddots & & & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}.$$

4.1.2 Solução de sistemas lineares

O **método de Gauss** é a maneira de resolver um sistema linear trabalhando com sua matriz ampliada. O objetivo é reduzir a matriz ampliada a sua forma escalonada, e então obter a solução do sistema equivalente obtido.

Exemplo 4.4 *Resolva e classifique o sistema linear abaixo, utilizando o método de Gauss:*

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=7 \\ x+2y+1z=8 \end{cases}$$

Solução:
Vamos escalonar a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 2\cdot L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 8 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_1 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix} L_2 \Leftrightarrow L_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - L_2 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow -L_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 - L_3{}_{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ *O sistema é compatível e determinado, e sua solução é* $S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.5 *Resolva o sistema abaixo e classifique-o.*

$$\begin{cases} x + y + 3w = 4 \\ 2x + y - z + w = 1 \\ 3x - y - z + 2w = -3 \\ -x + 2y + 3z - w = 4 \end{cases}$$

Solução:
Vamos utilizar o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_1{}_{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 3 \cdot L_1{}_{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] L_4 \to L_4 + L_1{}_{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow -L_2{}_{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - L_2{}_{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + 4 \cdot L_2{}_{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] L_4 \to L_4 - 3 \cdot L_2{}_{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right] L_3 \to \frac{1}{3} \cdot L_3{}_{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - L_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + L_3 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{array}\right] L_4 \to \frac{-1}{13} L_4 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} & \vdots & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - \frac{13}{3} L_4 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - \frac{2}{3} L_4 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 - \frac{7}{3} L_4 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array}\right]$$

Reescrevendo a matriz ampliada como um sistema, teremos que:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ *O sistema é compatível e determinado.* $S = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.2 Método da matriz inversa

Para sistemas lineares em que o número de equações coincide com o número de incógnitas, podemos utilizar um outro método para resolvê-los, que chamaremos de **método da matriz inversa**. Considere o sistema

$$AX = B$$

e suponha que A seja uma matriz inversível. Neste caso, existe a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ e daí

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Portanto, se A é inversível, o sistema possui uma única solução dada por

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Exemplo 4.6 *Dado o sistema linear abaixo:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 32 \\ x + y = 16 \\ -y - 2z = 24 \end{cases}$$

Determine a solução do sistema utilizando o método da matriz inversa.

Solução:
Primeiro, vamos escrever o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Para utilizar o método da matriz inversa é necessário calcular a matriz inversa de A, caso exista, a solução do sistema pode ser dado da seguinte maneira: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to -L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 + 3 \cdot L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 3 \cdot L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Desta forma, a solução será:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 32 - 1\cdot 16 + 3\cdot 24 \\ -2\cdot 32 + 2\cdot 16 - 3\cdot 24 \\ 1\cdot 32 - 1\cdot 16 + 1\cdot 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 - 16 + 72 \\ -64 + 32 - 72 \\ 32 - 16 + 24 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *A solução do sistema é* $X = \begin{bmatrix} 120 \\ -104 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4.7 *Resolva o sistema abaixo, utilizando o método da matriz inversa.*

$$\begin{cases} x + 2w = 10 \\ x - y = 6 \\ -y - 2z + w = 30 \\ y + z = 12 \end{cases}$$

Solução:
Escrevendo o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Abaixo temos a matriz ampliada e as respectivas operações elementares sobre as linhas da mesma, para se obter a matriz inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to -L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to L_4 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \Leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to L_4 + 2\cdot L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_4 \to -L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow_{L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Desta forma, a solução será:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 12 \\ -1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 12 \\ 1 \cdot 10 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 30 - 3 \cdot 12 \\ 1 \cdot 10 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 30 - 2 \cdot 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 + 12 + 60 + 48 \\ -10 + 6 + 60 + 48 \\ 10 - 6 - 60 - 36 \\ 10 - 6 - 30 - 24 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ *A solução do sistema é* $X = \begin{bmatrix} 110 \\ 104 \\ -92 \\ -50 \end{bmatrix}$.

4.3 Exercícios

(1) Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares utilizando o método de Gauss:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -\dfrac{14}{3}x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$

(2) Expresse matricialmente os sistemas:

(a) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 4y + 7z = 2 \\ 2x + 3y + 6z = 2 \\ 5x + y - z = 8 \end{cases}$

(3) Resolva os sistemas lineares do exercício anterior utilizando o método da matriz inversa, caso seja possível.

(4) Determine o valor real de a, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - az = 0 \end{cases}$$

(5) Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Determine, os valores reais de a, para que o sistema seja:

(a) compatível e determinado;

(b) compatível e indeterminado;

(c) incompatível.

(6) Sejam
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(a) Determine, se possível, a inversa de A;

(b) Utilize o método da matriz inversa para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1$ e 2.

(7) Determine o valor real de a, para que o sistema linear dado admita solução compatível e indeterminada.

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ 2x + ay + 8z = 3 \end{cases}$$

(8) **(FUVEST)** Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

(9) **(UFU - Adaptada)** Resolva o problema a seguir, por meio de sistemas lineares.
Por causa de hábitos alimentares inadequados, um cardiologista nota que os seus pacientes com hipertensão são cada vez mais jovens e fazem uso de medicamentos cada vez mais cedo. Suponha que Pedro, Márcia e João sejam pacientes, com faixas etárias bem distintas e que utilizam um mesmo hipertensivo em comprimidos. Sabe-se que João utiliza comprimidos de 2 mg, Márcia de 4 mg e Pedro de 10 mg. Além disso, mensalmente, Pedro toma o triplo de comprimidos de Márcia e os três consomem 130 comprimidos, totalizando 780 miligramas da droga. Com base nestas informações, quantos comprimidos Márcia ingere mensalmente?

(10) **(UFV)** No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos segmentos pagarei R\$ $31,00$. Determine x, y e z.

5

Módulo 5: Determinantes

Ementa: Definição, exemplos e propriedades de determinantes de uma matriz.
Objetivos: Entender os métodos de determinação do determinante de uma matriz e saber utilizar suas propriedades na resolução de problemas.

Dada uma matriz quadrada A, o *determinante* de A é um número associado a essa matriz que denotamos por $detA$ ou $|A|$. No caso da matriz A ser de ordem 2 ou 3 temos as seguintes fórmulas para $detA$:

(i) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Exemplo 5.1 *Seja a matriz* $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$*, calcule* $detA$*.*

Solução:

$$detA = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4.$$

(ii) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante de A é o número

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Exemplo 5.2 *Seja a matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, *calcule* $detB$.

Solução:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot -4 \cdot 7 + 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 0) - (0 \cdot 5 \cdot 7) - (3 \cdot (-4) \cdot (-3)) = -28 + 0 + 0 - 0 - 0 - 36 = -64$

5.1 Desenvolvimento de Laplace

Dada uma matriz genérica quadrada A, de ordem n, vejamos como obter o determinante de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para cada par $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos a matriz A_{ij} como sendo a submatriz quadrada de A obtida retirando a i-ésima linha e a $j-$ésima coluna. Chamaremos de **cofator** e denotaremos por $\triangle_{ij}$ o número dado por

$$\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|.$$

O determinante da matriz A será dado por

$$detA = a_{i1}\triangle_{i1} + a_{i2}\triangle_{i2} + \cdots + a_{in}\triangle_{in},$$

que chamamos de **desenvolvimento de Laplace (ou expansão em cofatores)**.

Exemplo 5.3 *Dada a matriz* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *utilize o desenvolvimento de Laplace para calcular* $detC$.

Solução:

$detC = c_{11}\triangle_{11} + c_{12}\triangle_{12} + c_{13}\triangle_{13} + c_{14}\triangle_{14}$

$detC = c_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |C_{11}| + c_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |C_{12}| + c_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot |C_{13}| + c_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot |C_{14}|$

$detC = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot$

$(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$detC = 1\cdot[0+2+2-(0+4-6)]+0+2\cdot[18+4+0-(2-6+0)]+0 = 1\cdot[4+2]+0+2\cdot[22-(-4)]+0 = 1\cdot 6+0+2\cdot 26+0 = 6+0+52+0 = 58$

$\therefore detC = 58$

5.2 Propriedades

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Se todos os elementos de uma linha ou coluna de A são nulos, então $detA = 0$;
- $detA = detA^t$;
- Se trocarmos a posição de duas linhas de A, o determinante troca de sinal;
- Se multiplicarmos uma linha de A por uma constante k, então o determinante da nova matriz é igual a $k \cdot detA$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & \cdots & k\cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

- Se A tiver duas linhas ou duas colunas iguais, seu determinante é nulo;
- O determinante de A não muda se somarmos a uma linha, outra linha multiplicada por uma constante;
- Se A for uma matriz triangular, então o determinante de A será o produto da sua diagonal principal;
- Se $detA = 0$ então não existe A^{-1};
- $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$;

- $det(AB) = detA \cdot detB$.

Exemplo 5.4 *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$*, determine:*

1. $detA$;
2. $detB$;
3. $det(AB)$.

Solução:

1. $detA = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (4 \cdot 1) = 6 - 4 = 2.$
2. *Note que a matriz B é semelhante a matriz A, sendo que a única coisa que difere ambas é a multiplicação da segunda linha de A por 10. Assim, por meio das propriedades dos determinantes, teremos que* $detB = 10 \cdot detA$.
   $\therefore detB = 10 \cdot 2 = 20.$
3. *Utilizando a propriedade,* $det(AB) = detA \cdot detB$*, teremos que:*
   $det(AB) = 2 \cdot 20 = 40.$

Exemplo 5.5 *Seja a matriz* $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$*, determine* $detC^{-1}$.

Solução: *Ao invés de calular a matriz inversa e posteriormente seu determinante, vamos utilizar a propriedade* $detC^{-1} = \dfrac{1}{detC}$.

$detC = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 - 4 - (-6 + 0 + 0) = -16 + 6 = -10.$

$\therefore detC^{-1} = \dfrac{1}{-10} = -\dfrac{1}{10}.$

5.3 A matriz adjunta

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

a **matriz adjunta** de A, denotada por $adjA$ é a transposta da matriz dos cofatores de A, isto é,

$$adjA = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{12} & \cdots & \triangle_{1n} \\ \triangle_{21} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{n1} & \triangle_{n2} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \triangle_{21} & \cdots & \triangle_{n1} \\ \triangle_{12} & \triangle_{22} & \cdots & \triangle_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \triangle_{1n} & \triangle_{2n} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}.$$

Uma relação entre a matriz A e sua adjunta, é dada por

$$adjA \cdot A = detA \cdot I_n.$$

Portanto, se A é uma matriz inversível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

Além disso,

$$A \quad \text{é inversível} \quad \Leftrightarrow \quad detA \neq 0.$$

Exemplo 5.6 *Calcule a matriz inversa de* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, *utilizando os conceitos de matriz adjunta.*

Solução: *Se* A, *for uma matriz inversível, logo* $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$. *Primeiramente encontraremos o* $detA$*:*

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 1 - (2 + 0 + 2) = 7 - 4 = 3.$$

Agora encontraremos $adjA$, *que para tal é necessário a matriz dos cofatores de* A*:*

$$\triangle_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = 1 \cdot 2 - 0 = 2$$

$$\triangle_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 2) = (-1) \cdot (2 - 0) = -2$$

$$\triangle_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 1 \cdot (1 - 2) = -1$$

$$\triangle_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-1) \cdot (2 - 1) = -1$$

$$\triangle_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 1 \cdot (6 - 2) = 4$$

$$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = (-1) \cdot (3 - 2) = -1$$

$$\triangle_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

$$\triangle_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (-1) \cdot (0-1) = 1$$

$$\triangle_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 1 \cdot (3-1) = 2$$

Logo, a matriz cofatores de A, será: $\triangle = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Por conseguinte, $adjA = \triangle^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

5.4 Exercícios

(1) Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.
( ) $det(5A) = 5 \cdot det(A)$;
( ) Sejam B e C, matrizes quadradas de ordem 2, tal que $detB = -2$ e $detC = -3$, então $det(BC) = 6$;
( ) $det(D+E) = detD + detE$;
( ) $det(-F) = detF$;
( ) $detI_n = 1$.

(2) Dada a matriz $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $detH$;

(b) $detH^2$

(3) Se J é uma matriz quadrada de ordem 4, com $detJ = 5$ e a um número real tal que $det(aJ) = 600$, então qual o valor de a?

(4) Calcule os determinantes das matrizes abaixo, utilizando o desenvolvimento de Laplace.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

(5) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10, determine:$

(a) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 7a & 7b & 7c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(6) Qual o cofator do elemento k_{23} da matriz $K = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$?

(7) Dadas as matrizes abaixo, se possível, calcule as suas respectivas inversas utilizando o conceito de matriz adjunta.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(8) Resolva a seguinte equação

$$\begin{vmatrix} 2+x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = 0$$

(9) Dada a matriz $L = \begin{bmatrix} x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule x para que L seja inversível.

(10) Determine a matriz adjunta de $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6

Módulo 6: Subespaços vetoriais - Parte I

Ementa: Definição e exemplos de subespaços vetorias; subespaços vetoriais triviais.
Objetivos: Saber verificar se um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial.

Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um **subespaço vetorial** de V ou simplesmente um **subespaço** de V, se W, com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares, é um espaço vetorial.

Seja W um subconjunto de um espaço vetorial V. Como os elementos de W estão em V, que já é um espaço vetorial, para verificarmos se W é subespaço vetorial de V basta verificarmos os seguintes itens:

(i) $W \neq \emptyset$;

(ii) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

(iii) se $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $au \in W$.

Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ admite pelo menos dois subespaços: o subespaço nulo e o próprio espaço vetorial V. Estes dois são os chamados **subespaços triviais** de V. Os demais subespaços são chamados **subespaços próprios** de V.

6.1 Exemplos

Exemplo 6.1 *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Verifique se S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.*

Solução: Verifiquemos se S satisfaz as condições vistas acima:

(i) É claro que $(0, 0, 0)$ satisfaz $0 + 0 + 0 = 0$, logo $S \neq \emptyset$.

(ii) Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in S$, tais que $\vec{u} = (x, y, z)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$ então $\vec{u} + \vec{v} = (x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c)$ e assim, $(x + a) + (y + b) + (z + c) = (x + y + z) + (a + b + c) = 0$. Portanto, $\vec{u} + \vec{v} \in S$.

(iii) Seja $\vec{u} = (x, y, z) \in S$, então $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, e daí $(\alpha x + \alpha y + \alpha z) = \alpha(x + y + z) = \alpha 0 = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, $\alpha\vec{u} \in S$.

Concluímos então que S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemplo 6.2 *Dado* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$.

Solução: Seja $\vec{u} = (2, 1) \in W$ e note que, a condição (iii) não é satisfeita, já que $-1\vec{u} = -1 \cdot (2, 1) = (-2, -1) \notin W$.

Portanto, W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 6.3 *Dado* $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : c = 0 \text{ e } d = a + b \right\}$. *Verifique se* A *é subespaço vetorial de* M_2.

Solução: Verifiquemos se A satisfaz as condições vistas acima:
Sejam $X, Y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $X = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix}$.

(i) $0 \in A$, pois $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, lembrando que $d = a + b$ como $a = 0$ e $b = 0$, logo $d = 0 + 0 = 0$.

(ii) $X + Y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 + 0 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \end{bmatrix}$, logo $X + Y \in A$.

(iii) $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha 0 & \alpha(a_1 + b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 0 & \alpha a_1 + \alpha b_1 \end{bmatrix}$. Logo, $\alpha X \in A$.

Como todas as condições foram verificadas concluímos que A é subespaço vetorial de M_2. ■

Exemplo 6.4 *Dado* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 1\}$. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

Solução: Vamos verificar se valem as propriedades de subespaço para W.

Note que $\vec{0} \notin W$, pois o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ não satisfaz a condição de V, ou seja, que $x - y - 3z = 1$, substituindo $x = y = z = 0$ temos $0 - 0 - 3.0 \neq 1$.
Daí $0 \cdot \vec{u} = 0 \notin W$ para todo $\vec{u} \in W$ e então (iii) não é satisfeita. Com isso, concluímos que W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. ■

Exemplo 6.5 *Dado* $V = \{(x, -x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. *Verifique se* V *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$.

Solução: Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para V.
Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (x_1, -x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, -x_2, y_2, z_2)$.

(i) $\vec{0} \in V$, pois $(0, -0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, -x_1, y_1, z_1) + (x_2, -x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, -x_1 + (-x_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2) =$
$= (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

(iii) $\alpha\vec{u} = \alpha(x_1, -x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, -\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$. Portando, $\alpha\vec{u} \in V$.

Como todas as condições foram verificadas concluímos que V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. ■

6.2 Exercícios

Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais.

(1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \text{ e } z = 5y\} \subset \mathbb{R}^3$.

(2) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

(3) $W = \{A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)} : a_{11} \leq 0\} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c + 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(5) $A = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : a_{12} = a_{21}\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(6) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\} \subset \mathbb{R}^2$.

(7) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 4\} \subset \mathbb{R}^3$.

(8) $W = \{$ o subconjunto das matrizes triangulares superiores de ordem 3$\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

(9) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\} \subset \mathbb{R}^3$.

(10) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

7

Módulo 7: Subespaços vetoriais - Parte II

Ementa: Operações com subespaços vetoriais; intersecção e soma de subespaços; subespaço vetorial gerado; espaços vetoriais finitamente gerados.
Objetivos: Entender as principais operações que podem ser realizadas entre subespaços vetoriais.

7.1 Operações com subespaços

Dados U e W subespaços de um espaço vetorial V, a **interseção** $U \cap W$ ainda é um subespaço de V. De fato,

- $U \cap W$ é sempre diferente de vazio, já que os dois subespaços contém o vetor nulo;
- Dados $u, w \in U \cap W$, u, w pertencem a U e também a W, que são subespaços. Logo $u + w$ pertence a U e W. Portanto $u + w \in U \cap W$;
- Dados $u \in U \cap W$ e $a \in \mathbb{R}$, como u pertence a U e W que são subespaços vetoriais, então au pertence a U e a W simultaneamente. Logo $au \in U \cap W$.

Portanto a interseção de subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial.

Observação 7.1 *A união de dois subespaços de um espaço vetorial V não é, necessariamente, um subespaço de V.*

Exemplo 7.1 *Sejam os subespaços $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. A união entre U e W será o conjunto:*

$$U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$$

O elemento neutro $(0,0)$ *está em* U *e em* W *e logo, está também na união. Consideremos os vetores* $u = (1,0) \in U$ *e* $w = (0,1) \in W$.

Temos que $u, w \in U \cup W$, *mas* $u + w = (1,0) + (0,1) = (1,1)$, *que é um vetor que não satisfaz nenhuma das condições do conjunto união, logo* $u + w \notin U \cup W$.

Dados U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, a **soma** dos subespaços U e W é dada pelo conjunto

$$U + W = \{v \in V : \ v = u + w, \ u \in U, \, w \in W\},$$

que é um subespaço vetorial de V. De fato,

- $U + W$ é sempre diferente de vazio, já que os dois subespaços contém o vetor nulo, logo $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in U + V$;

- Dados $v_1, v_2 \in U + W$, então $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$, com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Daí
$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W;$$

- Dados $v \in U + W$ e $a \in \mathbb{R}$, com $v = u + w$ e $u \in U$, $w \in W$, como U e W são subespaços vetoriais, então $au \in U$ e $aw \in W$, daí
$$av = au + aw \in U + W.$$

Portanto a soma de subespaços vetoriais continua sendo um subespaço vetorial.

Definição 7.1 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial* V. *O espaço vetorial* V *é dito* ***soma direta*** *de* U *e* W, *e é representado por* $V = U \oplus W$, *se* $V = U + W$ *e* $U \cap W = \{0\}$.

Exemplo 7.2 *Dado o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$, *verifique se a soma dos subespaços* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ *e* $W\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, *é uma soma direta, ou seja,* $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Temos que os elementos de U *são da forma* $(x,0) = x(1,0)$, *para* $x \in \mathbb{R}$. *Assim, o conjunto* U *é gerado pelo elemento (1,0), isto é,* $U = [(1,0)]$. *De mesmo modo, um elemento de* W *é da forma* $(0,y) = y(0,1)$, *para* $y \in \mathbb{R}$. *Assim, o conjunto* W *é gerado pelo elemento (0,1), isto é* $W = [(0,1)]$.

Note que, a intersecção entre U *e* W *é o elemento neutro de* $\mathbb{R}^2$, *ou seja,* $U \cap W = \{(0,0)\}$.
Além disso, $U + W = \mathbb{R}^2$, *já que qualquer elemento* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$. *Assim, temos* $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

7.2 Subespaço vetorial gerado

Seja V um espaço vetorial e considere S um subconjunto de V, não necessariamente sendo um subespaço vetorial. Por exemplo,

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V.$$

Uma **combinação linear** dos elementos de S é qualquer soma de vetores da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i. Denotemos por $G(S)$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S. O conjunto $G(S)$ assim construído, é um subespaço vetorial de V chamado **subespaço gerado** pelo conjunto S e simbolicamente temos

$$G(S) = \{v \in V : \ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n, \ \ a_i \in \mathbb{R}, \, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados **geradores** do subespaço $G(S)$ e S é chamado o **conjunto gerador** de $G(S)$.

Definição 7.2 *Um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existe um conjunto finito de vetores que geram V, isto é, $V = G(S)$, com S sendo um conjunto finito.*

Exemplo 7.3 *Considere o espaço das matrizes 2×2, denotado por $M_2(\mathbb{R})$ e observe que este é finitamente gerado. Seja S o conjunto dado por*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Note que S gera $M_2(\mathbb{R})$ já que $\forall \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.3 Exercícios

(1) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 2)\} \in \mathbb{R}^2$ gera o subespaço $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.

(2) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 0), (1, 1)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

(3) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $S = \{(2,1,0),(0,3,4)\}$.

(4) Sejam $W_1 = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(c,c,c) : c \in \mathbb{R}\}$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$? Se a resposta for não, determine $W_1 + W_2$.

b) $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?

(5) Dados $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (-1,2)$, sejam W_1 *e* W_2 as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e contêm $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, respectivamente.

a) $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$? Se a resposta for não, determine $W_1 + W_2$.

b) $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$?

(6) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} : a,c \in \mathbb{R} \right\}$ subespaços vetoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $W_1 + W_2$ é soma direta?

(7) Sejam $W_1 = [(1,0,1),(0,1,1)]$ e $W_2 = [(1,1,1),(1,0,0)]$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(8) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : onde\ a = d\ e\ b = c \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : onde\ a = c\ e\ b = d \right\}$ subespaços vetoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine $W_1 \cap W_2$.

(9) Encontre geradores de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

(10) Encontre geradores de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

8

Módulo 8: Dependência e independência linear

Ementa: Combinações lineares; conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes.
Objetivos: Saber verificar se um dado conjunto de vetores em um espaço vetorial é l.i. ou l.d., bem como compreender qual o significado dessas classificações e como utilizá-las em demonstrações.

Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores de V. Uma **combinação linear** dos vetores dados é qualquer soma da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i. Sempre é possível encontrar uma combinação linear dos vetores dados que satisfaz a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0. \tag{8.1}$$

Basta tomarmos todos os escalares a_i iguais a zero. Se a única solução da Equação (8.1) for $a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que A é um conjunto **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI. Caso contrário, se existirem soluções para (8.1). tais que algum $a_i \neq 0$, dizemos que o conjunto A é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD.

8.1 Propriedades

- O vetor nulo é LD, pois o produto de qualquer escalar por ele é igual a ele mesmo;

- Se v é um vetor não nulo de um espaço vetorial V, então o conjunto unitário $\{v\}$ é LI, pois $av = 0$, para $a \in \mathbb{R}$ se, e só se $a = 0$;
- Se um subconjunto de um espaço vetorial V contém o vetor nulo, então esse conjunto é LD;
- Se um subconjunto de um espaço vetorial V possui um vetor que é combinação linear dos demais, o conjunto é LD;
- Se B é um subconjunto de um espaço vetorial V tal que $A \subset B$ e A é um conjunto LD, então B também é LD;
- Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é LI e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\} \subset V$ é LD, então w é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

8.2 Exemplos

Exemplo 8.1 *Mostremos que o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$ é linearmente independente.*

De fato, a equação:

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

só vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, os vetores (1,0) e (0,1) são LI

Exemplo 8.2 *Os elementos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3,6)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes. Note que,*

$$3v_1 + (-1)v_2 = 3(1,2) - 1(3,6) = (0,0)$$

Exemplo 8.3 *Sejam os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (4,3)$ de $\mathbb{R}^2$. Mostremos que v_1 e v_2 são linearmente independentes.*

Observe que a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow \alpha_1(1,2) + \alpha_2(4,3) = (0,0)$$

é válida se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Exemplo 8.4 *Seja o subconjunto $\{2x, x^2+1, x+1, x^2-1\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Mostremos que é um subconjunto linearmente dependente.*

De fato, tomando a equação:

$$\alpha_1(2x) + \alpha_2(x^2+1) + \alpha_3(x+1) + \alpha_4(x^2-1) = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x)\alpha_1 + x^2\alpha_2 + \alpha_2 + x\alpha_3 + \alpha_3 + x^2\alpha_4 - \alpha_4 = 0 + 0x + 0x^2$$

Reorganizando, temos que:

$$(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (2\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_4)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Dois polinômios são iguais se os coeficientes correspondentes dos termos de mesmo grau forem iguais, sendo assim temos:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Note que, o sistema acima é um sistema linear homogêneo com apenas três equações e quatro incógnitas, ou seja, pelo menos uma incógnita vai ser dependente. Assim o sistema admite mais de uma solução além da solução trivial.

Daí podemos afirmar que o conjunto é linearmente dependente.

Exemplo 8.5 *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *pertencentes a* $M_2(\mathbb{R})$. *Mostremos que* A, B, C *e* D *são linearmente independentes.*

Para mostramos que os vetores acima são de fato LI, tomaremos a seguinte equação:

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos que $\alpha_2 = 0$. *Daí, temos que* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 8.6 *Mostremos que os polinômios* $1, x, x^2, x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ *são linearmente independentes.*

Tomemos a seguinte equação:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

Note que, a equação só vale se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 8.7 *Determine c para que o subconjunto* $\{(3, 5c, 1), (2, 0, 4), (1, c, 3)\} \in \mathbb{R}^3$ *seja linearmente independente.*

Para encontrarmos c onde conjunto seja linearmente independente, tomemos a equação:

$$\alpha_1(3, 5c, 1) + \alpha_2(2, 0, 4) + \alpha_3(1, c, 3) = (0, 0, 0)$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 5c\alpha_1 + c\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Para que o conjunto seja linearmente independente, temos que ter $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, *ou seja, o sistema linear homogêneo acima deve admitir somente a solução trivial (todos os* α_i, $i = 1, .., 3$ *iguais a zero). Mas para isso, basta que o determinante da matriz do sistema seja diferente de 0. Isto é:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5c & 0 & c \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2c + 20c - 30c - 12c \neq 0 \Rightarrow -20c \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$$

Assim, para $c \neq 0$ *o conjunto* $\{(3, 5c, 1), (2, 0, 4), (1, c, 3)\}$ *é LI e para* $c = 0$ *temos que o conjunto é LD*

Exemplo 8.8 *O subconjunto* $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 4)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *é linearmente dependente.*

De fato, temos que:

$$0(1, 1, 0, 0) + 2(0, 1, 0, 2) - 1(0, 0, 1, 0) = (0, 2, -1, 4)$$

Observe que, um dos vetores é combinação linear dos demais, assim o subconjunto é linearmente dependente.

8.3 Exercícios

(1) Mostre que o subconjunto $\{(1,2,1),(-1,1,2),(0,3,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.

(2) Mostre que o subconjunto $\{(1,2,-1),(2,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente independente.

(3) Mostre que o subconjunto $\{(4,8,-4),(6,12,-6)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.

(4) Escreva o vetor $\vec{v}=(1,-2,5)$ como combinação linear dos vetores $\vec{v_1}=(1,1,1), \vec{v_2}=(1,2,3)$ *e* $\vec{v_3}=(2,-1,1)$.

(5) Determine o valor de c para que o subconjunto $\{(1,-2,c),(3,1,-2),(2,-1,-5)\}$ de $\mathbb{R}^3$ seja linearmente independente.

Determine se os subconjuntos abaixo são linearmente dependentes ou independentes.

(6) $W=\{(4,-1,2),(-4,10,2)\}$.

(7) $W=\{(-3,0,4),(5,-1,2),(-1,-1,10)\}$.

(8) $W=\{2-x^2+4x^3, 3+6x+2x^2-x^3, 2+10x-4x^2\}$.

(9) $W=\{(3,8,7,-3),(1,5,3,-1),(2,-1,2,6),(1,4,0,3)\}$.

(10) $W=\{6-x^2, 1+x+4x^2\}$.

9

Módulo 9: Base e dimensão

Ementa: Definição e exemplos de base de um espaço vetorial; dimensão de um espaço vetorial.
Objetivos: Compreender procedimentos para determinar a base de um espaço vetorial. Saber verificar se um dado conjunto é ou não uma base de um dado espaço vetorial.

Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma **base** do espaço vetorial V se:

(i) B é LI;

(ii) B gera V.

Além disso, se V possui uma base com n vetores, dizemos que V tem **dimensão** n e indicamos por $dimV = n$. O espaço vetorial $\{\vec{0}\}$ tem dimensão zero.

9.1 Propriedades

- Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for base de um espaço vetorial V, então todo subconjunto de V com mais de n vetores é LD;
- Duas bases quaisquer de um espaço vetorial V têm o mesmo número de vetores;
- Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, qualquer vetor $v \in V$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de B;
- Se W é um subespaço vetorial de V então $dimW \leq dimV$ e a igualdade só ocorre se $W = V$;

9.2 Exemplos

Exemplo 9.1 *Mostremos que* $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*.*

De fato, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ *é linearmente independente, já que a equação*

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$$

só é válida para $\alpha_1=\alpha_2=0$*. Além disso, o conjunto gera todo o* $\mathbb{R}^2$*. Para mostrarmos que gera, basta mostrarmos que qualquer vetor* $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como combinação linear de* $\{(1,0),(0,1)\}$*.*

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$$

Logo, $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^2$*. E portanto a dimensão de* $\mathbb{R}^2$ *é igual a 2.*

Exemplo 9.2 *Seja* $B=\{(1,1),(0,1)\}$*. Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,1)=(0,0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$$

O sistema tem solução única: $\alpha_1=\alpha_2=0$*. Logo,* $B=\{(1,1),(0,1)\}$ *é LI.*

Além disso, precisamos verificar se $\{(1,1),(0,1)\}$ *gera todo o* $\mathbb{R}^2$*. Note que, todo vetor* $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como combinação linear de* B*.*

$$(x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$$

Assim, $\{(1,1),(0,1)\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 9.3 *Seja* $B=\{(2,1),(1,0),(0,1)\}$*. Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Note que, podemos escrever o vetor $(2,1)$ *como combinação linear de* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *da seguinte forma:*

$$(2,1)=2(1,0)+1(0,1)$$

Portanto, temos que $B=\{(2,1),(1,0),(0,1)\}$ *não é LI, logo não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 9.4 *Seja* $\{1,x-1,x^2-3x+1\}$*. Verifique se o conjunto é uma base para* $P_2(\mathbb{R})$*.*

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha(1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2 - 3x + 1) = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta x - \beta + \gamma x^2 - 3\gamma x + \gamma = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0 + 0x + 0x^2,$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 0 = 0 \\ \beta - 3.0 = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Como o sistema tem somente a solução trivial, concluimos que o conjunto é linearmente independente.

Além disso, precisamos verificar se $\{1, x-1, x^2 - 3x + 1\}$ *gera todo o conjunto* $P_2(\mathbb{R})$. *Note que, todo polinômio* $ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como combinação linear de* B.

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2 - 3x + 1).$$

Obtemos:

$$\begin{cases} a = \gamma \\ b = \beta - 3\gamma \\ c = \alpha - \beta + \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \beta - 3a \\ c = \alpha - \beta + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3a = \beta \\ c = \alpha - \beta + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3a = \beta \\ c = \alpha - (b + 3a) + a \end{cases}$$

Temos $c = \alpha - b - 3a + a \Rightarrow \alpha = c + b - 2a$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Logo,* $\{1, x-1, x^2 - 3x + 1\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^2$. *E dim* $P_2(\mathbb{R}) = 3$.

Exemplo 9.5 *Seja* $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. *Determine se* B *é uma base para* $M_2(\mathbb{R})$.

Primeiramente, temos que verificar se o conjunto é LI. Tomando a equação

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases}$$

Note que, o sistema só tem solução quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. *Logo, o conjunto* B *é linearmente independente.*

Além disso,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{b-a}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{a+b}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo B *gera* $M_2(\mathbb{R})$. *Portanto* B *é base de* $M_2(\mathbb{R})$ *e* $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Exemplo 9.6 *Seja* $B = \{(1,2,1),(1,3,0),(0,1,-1)\}$. *Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Note que, podemos escrever o vetor $(0,1,-1)$ *como combinação linear de* $(1,2,1)$ *e* $(1,3,0)$ *da seguinte forma:*

$$(0,1,-1) = 1(1,3,0) - 1(1,2,1)$$

Portanto, temos que $B = \{(1,2,1),(1,3,0),(0,1,-1)\}$ *é linearmente dependente, logo não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 9.7 *Seja* $B = \{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0),(2,5,4)\}$. *Determine se* B *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Note que, podemos escrever o vetor $(2,5,4)$ *como combinação linear de* $(1,1,1),(0,1,2)$ *e* $(0,2,0)$ *da seguinte forma*

$$1(0,1,2) + 2(1,1,1) + 1(0,2,0) = (2,5,4).$$

Portanto, temos que $B = \{(0,1,2),(1,1,1),(0,2,0),(2,5,4)\}$ *é linearmente dependente. Logo, não pode ser uma base para* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 9.8 $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a* n, $P_n(\mathbb{R})$, *conhecida como* ***base canônica*** *de* $P_n(\mathbb{R})$.

E de fato, o conjunto $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é linearmente independente uma vez que vale a equação:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$$

somente quando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, *pois dois polinômios só são iguais se todos os coeficientes correspondentes são iguais.*

Também verifica-se que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *gera todo o espaço de polinômios de grau menor ou igual que* n, *uma vez que qualquer* $p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como:* $\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + ... + \beta_n x^n$. *Logo,* $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é uma base de* $P_n(\mathbb{R})$. *Além disso,* $dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

9.3 Exercícios

Determine quais dos seguintes subconjuntos formam uma base para os determinados espaços vetoriais.

(1) $S = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(2) $S = \{2x^2 + x - 4, x^2 - 3x + 1\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

(3) $S = \{(1,0,-1),(1,1,1),(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(4) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(5) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(6) $S = \{1, x, x^2\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

(7) $S = \{(2,0,1),(3,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(8) $S = \{2, 1 - x, 2x^3 + x - 1, x^3 - 2x^2 - 3\} \subset P_3(\mathbb{R})$.

(9) $S = \{(1,0,1,3),(2,0,1,0),(1,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(10) $S = \{1 + x, x - x^2, 1 + 2x - x^2\} \subset P_2(\mathbb{R})$.

10

Módulo 10: Transformações lineares - Parte I

Ementa: Definição e exemplos de transformações lineares; núcleo e imagem de uma transformação linear; teorema do núcleo e da imagem; isomorfismo.
Objetivos: Aprender a provar que uma dada aplicação é uma transformação linear e calcular seu núcleo e imagem. Entender como se usa o teorema do núcleo e da imagem em demonstrações.

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma **transformação linear** de U em V é uma aplicação $T : U \to V$ satisfazendo:

(i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para quaisquer $u_1, u_2 \in U$;

(ii) $T(au) = aT(u)$, para quaisquer $u \in U$ e $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 10.1 *A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = 10x$, é uma transformação linear?*
Solução: *Vamos verificar se satisfaz (i) e (ii). De fato, se x_1, x_2 e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:*

(i) $T(x_1 + x_2) = 10(x_1 + x_2) = 10x_1 + 10x_2 = T(x_1) + T(x_2)$

(ii) $T(ax_1) = 10ax_1 = a10x_1 = aT(x_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 10.2 *Verifique se a função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x, y) = x + y$ é uma transformação linear.*
Solução: *Para tal, deve satisfazer (i) e (ii).*
Dados $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:

(i) $T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = x_1+x_2+y_1+y_2 = (x_1+y_1)+(x_2+y_2) = T(u_1)+T(u_2)$

(ii) $T(au_1) = T(a(x_1, y_1)) = T(ax_1, ay_1) = ax_1 + ay_1 = a(x_1 + y_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 10.3 *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$, verifique se é uma transformação linear.*
Solução: *Vamos verificar se satisfaz (i) e (ii). De fato, se $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$, então:*

(i) $T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2-(y_1+y_2), y_1+y_2-(z_1+z_2)) = ((x_1-y_1)+(x_2-y_2), (y_1-z_1)+(y_2-z_2)) = (x_1-y_1, y_1-z_1)+(x_2-y_2, y_2-z_2) = T(u_1)+T(u_2)$

(ii) $T(au_1) = T(a(x_1, y_1, z_1)) = T(ax_1, ay_1, az_1) = (ax_1 - ay_1, ay_1 - az_1) = (a(x_1 - y_1), a(y_1 - z_1)) = a(x_1 - y_1, y_1 - z_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$.*

Se $T : U \to V$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais U e V, o **núcleo** de T, denotado aqui por $N(T)$, é o conjunto de vetores de U que são levados, por T, no vetor nulo de V, isto é,

$$N(T) = \{u \in U : \ T(u) = 0\}.$$

O conjunto $N(T)$ assim defnido é um subespaço vetorial de U. Lembramos que uma aplicação T é injetiva se sempre que tivermos $T(u_1) = T(u_2)$ então $u_1 = u_2$. No caso das transformações lineares, ainda temos que, dada uma transformação linear T, vale o seguinte resultado:

$$T \quad \text{é injetiva} \quad \Leftrightarrow N(T) = \{0\}.$$

A **imagem** de uma transformação linear $T : U \to V$ entre os espaços vetoriais U e V é o conjunto

$$Im(T) = T(U) = \{T(u) \in V : \ u \in U\}.$$

O conjunto $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V. E lembramos que T é sobrejetiva se $Im(T) = V$.

Exemplo 10.4 *Determine o núcleo e a imagem da transformação linear, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$.*
Solução:
No núcleo da transformação estão todos os elementos do $\mathbb{R}^2$ que são transformados no elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ pela transformação T, ou seja:

$$T(x, y) = (x + y, x, 2y) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, $N(T) = \{(0,0)\}$ *e* T *é injetiva.*
Um elemento do contradomínio $\mathbb{R}^3$ *pertence a imagem de* T *se for da forma:*

$$(x+y, x, 2y) = (x, x, 0) + (y, 0, 2y) = x(1,1,0) + y(1,0,2)$$

Logo, $Im(T) = [(1,1,0),(1,0,2)]$.

Exemplo 10.5 *Seja a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y,z) = (x - y - z, 2z - x)$. *Determine o núcleo, a imagem e verifique se a transformação linear é injetiva ou sobrejetiva.*
Solução:
No núcleo da transformação estão todos os elementos do $\mathbb{R}^3$ *que são transformados no elemento neutro do* $\mathbb{R}^2$ *pela transformação* T*, ou seja:*

$$T(x,y,z) = (x-y-z, 2z-x) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases}$$

Da segunda equaçãodo do sistema, obtemos a variável x*:*

$$-x = -2z \Leftrightarrow x = 2z$$

Substituindo o valor de x *na primeira equação, teremos que:*

$$2z - y - z = 0 \Leftrightarrow z - y = 0 \Leftrightarrow -y = -z \Leftrightarrow y = z$$

Assim, o núcleo da transformação linear é $N(T) = \{(2z, z, z); z \in \mathbb{R}\}$*, portanto não é injetiva.*
Um elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^2$ *pertence a imagem de* T *se for da forma:*

$$(x - y - z, 2z - x) = x(1,-1) + y(-1,0) + z(-1,2)$$

Logo, temos que $Im(T) = [(1,-1),(-1,0)(-1,2)]$. *Vamos escalonar esses geradores da imagem como linhas de uma matriz, para obtermos uma base para a mesma:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \{(1,-1),(0,-1)\}$ *é uma base para* $Im(T)$ *e a* $dim(Im(T)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$. *Como* $Im(T)$ *é um subespaço do* $\mathbb{R}^2$ *e tem a mesma dimensão que* $\mathbb{R}^2$*, concluímos que* $Im(T) = \mathbb{R}^2$. *Logo a transformação linear é sobrejetiva.*

Teorema 10.1 (Teorema do núcleo e da imagem) *Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear, onde* U *tem dimensão finita. Então*

$$dim\, U = dim N(T) + dim Im(T).$$

Do teorema acima, segue que, se $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita e $dim\, U = dim\, V$ então para mostrar que T é bijetiva, basta mostrar apenas que T é injetiva ou sobrejetiva, isto é, neste caso

$$T \quad \text{é bijetiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \quad \text{é injetiva} \quad \Leftrightarrow \quad T \quad \text{é sobrejetiva.}$$

Uma transformação linear bijetiva é chamada **isomorfismo**. Dois espaços vetoriais que possuem um isomorfismo entre eles são ditos **isomorfos**.

Exemplo 10.6 *Considere a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x, y) = (2x, x + y)$*. Verifique se* T *é bijetiva.*
Solução:
Primeiro vamos verificar se T *é injetiva. Desta forma, um elemento* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *está no núcleo se:*

$$T(x, y) = (2x, x + y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, $N(T) = \{(0, 0)\}$ *e* T *é injetiva.*
Para verificar se T *é sobrejetiva, poderemos utilizar o teorema do núcleo e da imagem. Como* $dim(N(T)) = 0$ *e* $dim(\mathbb{R}^2) = 2$*, teremos que:*

$$2 = 0 + dimIm(T) \Leftrightarrow dimIm(T) = 2$$

Como a $dimIm(T) = dim(\mathbb{R}^2)$*, temos que* T *é sobrejetiva.*
$\therefore T$ *é injetiva e sobrejetiva, logo* T *é bijetiva.*

Exemplo 10.7 *Mostre que a transformação linear:* $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ *é um isomorfismo.*
Solução:
No núcleo da transformação estão todos os elementos do $\mathbb{R}^3$ *que são transformados no elemento neutro do* $\mathbb{R}^3$ *pela transformação* T*, ou seja:*

$$T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Utilizando o método de Guass, para a resolução do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_3 \Leftrightarrow L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + 2 \cdot L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, $N(T) = \{(0,0,0)\}$ *e* T *é injetiva.*
Para verificar se T *é sobrejetiva, poderemos utilizar o teorema do núcleo e da imagem. Como* $dim(N(T)) = 0$ *e* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$*, teremos que:*

$$3 = 0 + dimIm(T) \Leftrightarrow dimIm(T) = 3$$

Como $Im(T) = \mathbb{R}^3$*, temos que* T *é sobrejetiva.*
$\therefore$ T *é injetiva e sobrejetiva, logo* T *é isomorfismo.*

10.1 Exercícios

(1) Entre as funções dadas abaixo, verifique quais são transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, w, z) = (x - y + w + z, x + 2w - z, x + y + 3w - 3z)$;
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$;

(2) Dada uma transformação linear T tal que $T(u) = 5u$ e $T(v) = u - v$, calcule em função de u e v:

(a) $T(u + v)$;
(b) $T(2v)$;
(c) $T(-2u)$;
(d) $T(u - 8v)$;

(3) Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (y + kx, y + k, x)$. Verifique em que casos T é linear: $k = y, k = 0, k = 1, k = x$.

(4) Determine n e m e a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

(a) $T(1, 1, 1) = (1, 2), T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$;
(b) $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0), T(0, 1, 0) = (1, 0, -1), T(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$

(5) Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

   (a) Determine $T(x, y)$;
   (b) Determine $N(T)$ e $Im(T)$;
   (c) T é injetiva? E sobrejetiva?

(6) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo seja gerado por $(1, 2, 1)$ e $(1, 1, 0)$.

(7) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada por $(1, 2, 3)$ e $(0, 1, 1)$.

(8) Seja $T : U \to \mathbb{R}^5$ uma transformação linear.

   (a) Se T é sobrejetiva e $dimN(T) = 2$, qual é a $dim(U)$?;
   (b) Se T é injetiva e sobrejetiva, qual é a $dim(U)$?

(9) Verifique se a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$ é isomorfismo.

(10) Considere os operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos por $T(x, y, z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$ e $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$. Verifique quais dos operadores lineares são isomorfismos.

11

Módulo 11: Transformações lineares - Parte II

Ementa: Matriz de uma transformação linear; operações com transformações lineares; operadores lineares.
Objetivos: Determinar a matriz de uma transformação linear e utilizá-la na resolução de problemas envolvendo transformações lineares.

11.1 Transformações lineares e matrizes

Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita e fixarmos bases para estes espaços, então uma transformação linear $T : U \to V$ pode ser representada por uma matriz. Vejamos como determinar tal matriz.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões n e m respectivamente e $T : U \to V$ uma transformação linear. Fixemos $\alpha = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V. Como β é base de V, para cada $u_j \in \alpha$ podemos determinar a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ tais que

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m.$$

Assim, para $u = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$, teríamos

$$T(u) = k_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{m1}v_m) + \ldots + k_n(a_{1n}v_1 + \ldots + a_{mn}v_m).$$

E daí as coordenadas de $T(u)$ na base β seriam dadas por

$$[T(u)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [T]^\alpha_\beta \cdot [u]_\alpha,$$

onde a matriz

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}k_n \end{array} \right)$$

representa T em relação às bases α e β, e é chamada **matriz de T nas bases** α e β.

Exemplo 11.1 *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (2x - y, x)$. Determine a matriz da transformação, considerando a base canônica.*
Solução: *A base canônica de $\mathbb{R}^2$ é $\{e_1, e_2\}$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Aplicando a transformação em e_1 e e_2, temos:*

$$T(1, 0) = (2, 1) = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$T(0, 1) = (-1, 0) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

A matriz da transformação, $[T]$, será uma matriz do tipo 2×2 cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base canôninca

$$[T] = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right]$$

Exemplo 11.2 *Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y) = (2x - y, x - 2y, x + 2y)$. Determine a matriz da transformação $[T]^{\alpha}_{\beta}$, com $\alpha = \{(1, 0), (1, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$.*
Solução: *Aplicando a transformação na base do domínio, teremos que:*

$$T(1, 0) = (2, 1, 1)$$

$$T(1, 1) = (1, -1, 3)$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base α, pela transformação linear T, como combinação linear dos elementos da base β:

$$(2, 1, 1) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 1) + a_{31}(0, 0, 1) = (a_{11}, a_{21}, a_{21} + a_{31})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 1 - a_{21} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 1 - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 0 \end{array} \right.$$

Assim, o vetor na base β, será $[(2, 1, 1)]_{\beta} = (2, 1, 0)$.

$$(1, -1, 3) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 1) + a_{32}(0, 0, 1) = (a_{12}, a_{22}, a_{22} + a_{32})$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{12}=1 \\ a_{22}=-1 \\ a_{22}+a_{32}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12}=1 \\ a_{22}=-1 \\ a_{32}=3-a_{22} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12}=1 \\ a_{22}=-1 \\ a_{32}=3-(-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_{12}=1 \\ a_{22}=-1 \\ a_{32}=4 \end{array}\right.$$

Assim, o vetor na base β, será $[(1,-1,3)]_\beta = (1,-1,4)$. Desta forma, a matriz da transformação é

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11.3 *Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nas bases $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é*

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre a expressão $T(x,y)$.

Solução: *Pela definição da matriz de uma transformação linear, sabemos que:*

$$T(1,0) = 2\cdot(1,0,1) - 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,1,0) = (2,-1,1)$$

$$T(0,1) = 1\cdot(1,0,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,1,0) = (1,1,2)$$

Contudo, todo elemento do $\mathbb{R}^2$ poderá ser escrito de modo único, como:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Aplicando a transformação, teremos:

$$T(x,y) = x\cdot T(1,0) + y\cdot T(0,1) \Leftrightarrow T(x,y) = x(2,-1,1) + y(1,1,2) = (2x+y, -x+y, x+2y)$$

$$\therefore T(x,y) = (2x+y, -x+y, x+2y)$$

Exemplo 11.4 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear com matriz:*

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Determine a aplicação $T(x,y)$, tal que α seja a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e β a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Como as bases são as canônicas, pela definição da matriz de uma transformação linear, temos:

$$T(1,0,0) = (1,-4)$$

$$T(0,1,0) = (2,2)$$

$$T(0,0,1) = (-3,-5)$$

Assim

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = x \cdot (1,-4) + y \cdot (2,2) + z \cdot (-3,-5) = (x + 2y - 3z, -4x + 2y + 5z)$$

$\therefore T(x,y,z) = (x + 2y - 3z, -4x + 2y + 5z)$

11.2 Operações com transformações lineares

Sejam $T : U \to V$ e $S : U \to V$ transformações lineares. A **soma** de T e S é uma nova transformação linear definida, para todo $u \in U$, por

$$(T + S)(u) = T(u) + S(u).$$

E dado $k \in \mathbb{R}$, o **produto** de k por T é a transformação linear definida, para todo $u \in U$, por

$$(kT)(u) = kT(u).$$

Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita, α é base de U e β é base de V então

$$[T + S]_\beta^\alpha = [T]_\beta^\alpha + [S]_\beta^\alpha \quad \text{e}$$

$$[kT]_\beta^\alpha = k[T]_\beta^\alpha,$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 11.5 *Sejam as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_1(x,y) = (x - y, 2x + y, -2x)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T_2(x,y) = (2x - y, x - 3y, y)$. Determine as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$:*

1. $T_a = T_1 - T_2$;

2. $T_b = 3T_1 - 2T_2$.

Solução:
É importante notar que tanto T_1, como T_2, são transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, logo:

1. $T_a(x,y) = (x - y, 2x + y, -2x) - (2x - y, x - 3y, y) = (-x, x + 4y, -2x - y)$

2.

$$\begin{aligned} T_b(x,y) &= 3(x-y, 2x+y, -2x) - 2(2x-y, x-3y, y) \\ &= (3x-3y, 6x+3y, -6x) - (4x-2y, 2x-6y, 2y) \\ &= (-x-y, 4x+9y, -6x-2y) \end{aligned}$$

Exemplo 11.6 *Sabendo que $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são transformações lineares e que suas matrizes em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ são:*

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $[T_1 + 2 \cdot T_2]$.
Solução:

$$[T_1 + T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

11.3 Operadores lineares

Quando a transformação linear é de um espaço V nele mesmo a chamamos de **operador linear**.

Exemplo 11.7 *Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (3x+2y, 2x+5y)$, é uma transformação linear e consequentemente um operador linear.*
Solução: *Para a transfromação ser linear, ela deve satisfazer duas condições, na qual verificamos abaixo. Dado, $u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$, teremos que:*

(i) $T(u_1 + u_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3x_1 + 3x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 + 5y_1 + 5y_2) = (3x_1 + 2y_1, 2x_1 + 5y_1) + (3x_2 + 2y_2, 2x_2 + 5y_2) = T(u_1) + T(u_2)$

(ii) $T(au_1) = T(a(x_1, y_1)) = T(ax_1, ay_1) = (3ax_1 + 2ay_1, 2ax_1 + 5ay_1) = a(3x_1 + 2y_1, 2x_1 + 5y_1) = aT(u_1)$

$\therefore$ *T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, logo um operador linear em $\mathbb{R}^2$. Além disso, essa transformação se classifica como um operador linear simétrico, ou seja, $([T]_\beta)^t = [T]_\beta$.*

Dado um espaço vetorial V de dimensão finita e escolhidas duas bases de V, digamos α e β, temos uma relação entre as matrizes que dão as coordenadas de um vetor $v \in V$ nessas duas bases. Basta utilizarmos o operador linear identidade $I_V : V \to V$ dado por $I_V(v) = v$. Assim, temos

$$[v]_\beta = [I_V]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha,$$

onde chamamos a matriz $[I_V]^\alpha_\beta$ de **matriz mudança de base** de α para β.

Exemplo 11.8 *Considere as bases ordenadas de* $\mathbb{R}^3$, $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *e* $\beta = \{(1,2,-1),(1,-2,0),(1,1,-1)\}$. *Assim, determine:*

1. *A matriz mudança de base de* β *para* α, $[M]_\alpha^\beta$*;*

2. *As coordenadas de* v *com relação a base* α, *tal que o elemento* $v = (6,2,-7) \in \mathbb{R}^3$ *tem a seguinte matriz de coordenadas com relação a base* β*:*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Solução:

1. *Escrevendo os elementos da base* β *como combinação linear dos elementos da base* α*:*

$$(1,2,-1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$(1,-2,0) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,,1,0) + a_{32}(0,0,1) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$(1,1,-1) = a_{13}(1,0,0) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

Logo, a matriz mudança de base de β *para* α, *será:*

$$[M]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. *Pela definição, temos que:*

$$[v]_\alpha = [M]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta$$

Logo

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11.4 Exercícios

(1) Determine a matriz da transformação de cada uma das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T(x,y,z) = (2x - y, 0, y + z)$, considerando a base canônica do $\mathbb{R}^3$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$, com $\alpha = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(-1,1),(0,1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$.

(2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 3z)$ e considere as bases $\alpha = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Determine:

(a) $[T]^{\alpha}_{\beta}$;

(b) $[T]^{\beta}_{\alpha}$.

(3) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Encontre a expressão de $T(x, y, z)$.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$ e $T(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$.

(a) Determine $T(x, y, z)$;

(b) Determine a matriz de transformação com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(5) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule $T(x, y)$.

(6) Sejam S e T operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (x - 2y, y)$ e $T(x, y) = (2x, -y)$. Determinar:

(a) $S + T$;

(b) $T - S$;

(c) $2S + 4T$.

(7) Sabendo que S,T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e que suas matrizes de transformação linear em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$ sejam:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $[S - 5 \cdot T]$.

(8) Considere as bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ para $\mathbb{R}^2$. Encontre a matriz mudança de base de β para α.

(9) Considere a matriz de mudança da base β para α de $\mathbb{R}^3$.

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Se o elemento $v \in \mathbb{R}^3$ tem matriz de coordenadas com relação a base β dada por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de coordenadas de v com relação a base α.

(10) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(x, y, z) = (x - y, x + 2y - z, y - z)$. Determine $[T]_\beta^\alpha$, sendo $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

12

Módulo 12: Autovalores e autovetores

Ementa: Autovalores e autovetores; polinômio característico; diagonalização de operadores.
Objetivos: Calcular os autovalores e autovetores de um operador linear dado e compreender a utilização destes na diagonalização de operadores.

Dado um operador linear $T : V \to V$, dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de T se existir um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = cv$. O vetor v, neste caso, é chamado **autovetor** de T associado a c.

O subespaço vetorial de V definido por

$$A_c = \{v \in V : \ T(v) = cv\}$$

é chamado **autoespaço** de T associado a c.

Exemplo 12.1 *O operador $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x, y + 2x)$ é tal que todo vetor $v = (x, -x) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$, é um autovetor de T associado ao autovalor $c = -1$.*

Exemplo 12.2 *O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, tem $c_1 = 1$ como autovalor de T, cujos autovetores associados são da forma $v_1 = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, com $x^2 + y^2 \neq 0$. Outro autovalor de T é $c_2 = 0$, com os autovetores associados da forma $c_2 = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$, com $z \neq 0$.*

Se $dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T.

Exemplo 12.3 *O operador $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2z, x + z, y - 2z)$ tem 3 autovalores distintos e 3 é justamente igual a dimensão do espaço: $c_1 = 1, c_2 = -1$ e $c_3 = -2$.*

Os autovetores associados a esses autovalores, serão respectivamente:

$z(2,3,1)$, *com* $z \in \mathbb{R}$ *e* $z \neq 0$;

$z(-2,1,1)$, *com* $z \in \mathbb{R}$ *e* $z \neq 0$;

$z(-1,0,1)$, *com* $z \in \mathbb{R}$ *e* $z \neq 0$.

Nesse caso, existe uma base β *do* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovetores de* T*:*

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(2,3,1), (-2,1,1), (-1,0,1)\}$$

12.1 Polinômio característico

Sejam $T : V \to V$ um operador linear sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, com $dimV = n$ e α uma base de V. Chamaremos de **polinômio característico** de T o polinômio definido por

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]_\alpha^\alpha).$$

Assim, $c \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, c é uma raiz de $p_t(x)$, isto é, se $p_T(c) = 0$.

Exemplo 12.4 *Encontre o polinômio característico e os autovalores da aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $T(x,y) = (3x, 3y)$.
Solução:
Sendo α*, base canônica do* $\mathbb{R}^2$*, teremos que a matriz da transformação da aplicação* T*, será:*

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinôminio característico da transformação T*, por meio da definição:*
$p_T(x) = det(xI_n - [T]) = \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right|$
$= \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot(x-3) - 0 = (x-3)\cdot(x-3)$

$\therefore p_T(x) = (x-3)\cdot(x-3)$.

Os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$*. Assim:*

$$p_T(c) = (c-3)\cdot(c-3) = 0$$

$$c - 3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 3$$

$$c - 3 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 3$$

$\therefore c_1 = c_2 = 3$ *é autovalor de* T.

Exemplo 12.5 *Considere o operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido por* $T(x, y, z) = (5x - 6y - 6z, -x + 4y + 2z, 3x - 6y - 4z)$, *determine seu polinômio carcaterístico e suas respectivas raízes.*
Solução:
Sendo α *base canônica do* $\mathbb{R}^3$, *teremos que a matriz da transformação da aplicação* T, *será:*

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinôminio característico da transformação T, *por meio da definição:*

$$\begin{aligned} p_T(x) = det(xI_n - [T]) &= \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= (x-5) \cdot (x-4) \cdot (x+4) + 36 + 36 - (-18(x-4) - 12(x-5) + 6(x+4)) \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1) \cdot (x-2)^2 \end{aligned}$$

$\therefore p_T(x) = (x-1) \cdot (x-2)^2$.

As raízes de $p_T(x)$, *poderão ser obtidos por meio de* $p_T(c) = 0$. *Assim:*

$$p_T(c) = (c-1) \cdot (c-2)^2 = 0$$

$$c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$(c-2)^2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 2$$

Exemplo 12.6 *Encontre o polinômio característico e os autovalores do operador* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definido por* $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
Solução:

Sendo α a base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos que a matriz da transformação de T será:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos obter o polinômio característico da transformação T por meio da definição:

$$\begin{aligned} p_T(x) = det(xI_n - [T]) &= \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\cdot(x+1) - 1 \\ &= x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore p_T(x) = x^2 - 2$ *e os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de* $p_T(c) = 0$. *Assim,*

$$p_T(c) = c^2 - 2 = 0$$

$$c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

$$c_1 = \sqrt{2}; c_2 = -\sqrt{2}$$

$\therefore c_1 = \sqrt{2}; c_2 = -\sqrt{2}$ *são autovalores de T.*

12.2 Diagonalização de operadores

Um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita é **diagonalizável** se for possível representá-lo por uma matriz diagonal em alguma base de V.

O operador linear $T : V \to V$ possui uma base α tal que a matriz $[T]^\alpha_\alpha$ é diagonal se, e somente se, essa base α for formada por autovetores de T.

Exemplo 12.7 *Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. Determine o polinômio característico, autovalores, autovetores e a matriz diagonal, caso exista, da transformação T.*
Solução:
Sendo α, base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos que a matriz da transformação da transformação T em relação a base α, será:

$$[T]^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinômio característico da transformação T por meio da definição:

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]) = \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}.$$

$\therefore p_T(x) = x^2 - 1$ *e os autovalores da transformação poderão ser obtidos por meio de* $p_T(c) = 0$. *Assim,*

$$p_T(c) = c^2 - 1 = 0$$
$$c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{1}$$
$$c_1 = 1; c_2 = -1$$

$\therefore c_1 = 1$ *e* $c_2 = -1$, *são autovalores de* T.
Agora, determinaremos os autovetores. Logo, para $c_1 = 1$, *teremos que:*

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x, y) = c_1(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = 1(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

Assim, os autovetores de T *associados a* c_1 *são da forma:* $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$. *Para* $c_2 = -1$, *teremos que:*

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x, y) = c_2(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = -1(x, y) \Leftrightarrow y = -x$$

Assim, os autovetores de T *associados a* c_2 *são da forma:* $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$.
Note que a $dim(\mathbb{R}^2) = 2$ *e os autovetores* v_1 *e* v_2 *são linearmente independentes. Então teremos uma base* β, *para o* $\mathbb{R}^2$, *formada por esses autovetores do operador* T:

$$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base β, *pela transformação* T, *como combinação linear dos elementos de* β, *teremos:*

$$T(1, 1) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(1, -1)$$

$$T(1, -1) = (-1, 1) = 0(1, 1) - 1(1, -1)$$

$\therefore$ *A matriz diagonal que representa* T, *com relação a base* β *é:*

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 12.8 *Considere o operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x, y, z) = (x + y, -y, z)$ *e a base canônica* $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$. *Se possível, determine:*

1. *Polinômio característico de* T;

2. *Autovalores;*

3. *Autovetores;*

4. *Matriz de diagonalização.*

Solução

1. *Teremos que a matriz da transformação da aplicação T em relação a base β, será:*

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico de T, será:

$$\begin{aligned} p_T(x) = det(xI_n - [T]) &= \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$\therefore p_T(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = (x-1)^2 \cdot (x+1)$.

2. *Os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim,*

$$p_T(c) = (c-1)^2 \cdot (c+1) = 0$$

$$(c-1)^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$c+1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -1$$

Note que o autovalor $c_1 = 1$, tem multiplicidade algébrica igual a 2, e o autovalor $c_2 = -1$ tem multiplicidade algébrica igual a 1.

3. *Para $c_1 = 1$, teremos que:*

$$\begin{aligned} T(v) = cv \Leftrightarrow T(x,y,z) = c(x,y,z) &\Leftrightarrow (x+y, -y, z) = 1(x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x \\ -y = y \\ z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, os autovetores de T associados a c_1 são da forma:

$$v_1 = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$$

Para $c_2 = -1$, teremos que:

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x, y, z) = c(x, y, z) \Leftrightarrow (x + y, -y, z) = -1(x, y, z)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -x \\ -y = -y \\ z = -z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, os autovetores de T associados a c_2 são da forma:

$$v_2 = (x, -2x, 0) = x(1, -2, 0)$$

4. *Note que a $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e os vetores que geram os autovetores de T são linearmente independentes. Daí, teremos uma base α para o $\mathbb{R}^3$, formada por autovetores do operador T:*

$$\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 0)\}$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base α, pela transformação T, como combinação linear dos elementos de α, teremos:

$$T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0) = (1, 0, 0)$$
$$T(0, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0) = (0, 0, 1)$$
$$T(1, -2, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) - 1(1, -2, 0) = (-1, 2, 0)$$

Portanto, a matriz diagonal que representa T, com relação a base α é:

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

12.3 Exercícios

(1) Calcule os autovalores das seguintes matrizes:

(a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) Verifique se os vetores dados, são autovetores das matrizes correspondentes:

(a) $v = (-2, 1)$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $v = (-2, 1, 3)$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x + y)$, determine seu polinômio carcaterístico e suas respectivas raízes.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. Considere os vetores $v_1 = (2, 1), v_2 = (-1, 1), v_3 = (2, 3)$ e $v_4 = (4, 4)$, identifique os que são autovetores de T e determine seus autovalores.

(5) Determine o polinômio característico, autovalores e autovetores das seguintes transformações:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$.

(6) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$.

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Determine os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por autovetores de T. Qual a representação matricial de T nesta base?

(7) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine a matriz diagonal.

(8) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por autovetores de T.

(9) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear, definiada por $T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z)$. Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T.

(10) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine a matriz diagonal.

Soluções dos exercícios

Seção 1.3

(1) Seja $\vec{u} = (1, y_1, z_1) \in V$. Note que a condição (A3) não é satisfeita, pois o vetor nulo do R^3 não pertence a V, ou seja, $\vec{0} \notin V$.
Subtituindo $y_1 = z_1 = 0$, teremos $\vec{u} = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
$\therefore V$ não é um espaço vetorial.

(2) $V = \{(x, y, z, x) \in \mathbb{R}^4 : x = w\}$.
Vamos verificar se as condições são válidas, para V ser um espaço vetorial real.
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, x_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2, x_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3, x_3)$.

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(x_1, y_1, z_1, x_1) + (x_2, y_2, z_2, x_2)] + (x_3, y_3, z_3, x_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, x_1 + x_2) + (x_3, y_3, z_3, x_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, y_1, z_1, x_1) + [(x_2, y_2, z_2, x_2) + (x_3, y_3, z_3, x_3)] = (x_1, y_1, z_1, x_1) + (x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3, x_2+x_3) = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3, z_1+z_2+z_3, x_1+x_2+x_3)$.
$\therefore (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(A2) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1, x_1) + (x_2, y_2, z_2, x_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, x_1 + x_2)$
$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1, x_2 + x_1) = (x_2, y_2, z_2, x_2) + (x_1, y_1, z_1, x_1) = \vec{v} + \vec{u}$
$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(A3) $0 \in V$, pois tomando $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, teremos que $\vec{u} = (0, 0, 0, 0) = \vec{0}$.
$\vec{u} + 0 = (x_1, y_1, z_1, x_1) + (0, 0, 0, 0) = (x_1 + 0, y_1 + 0, z_1 + 0, x_1 + 0) = (x_1, y_1, z_1, x_1) = \vec{u}$

(A4) Dado $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1, x_1)$, existe $(-\vec{u}) = (-x_1, -y_1, -z_1, -x_1)$ tal que:
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, y_1, z_1, x_1) + (-x_1, -y_1, -z_1, -x_1) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1, x_1 - x_1) = (0, 0, 0, 0) = \vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha[(x_1, y_1, z_1, x_1)+(x_2, y_2, z_2, x_2)] = \alpha(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, x_1+x_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2), \alpha(z_1 + z_2), \alpha(x_1 + x_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha z_1 + \alpha z_2, \alpha x_1 + \alpha x_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha x_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2, \alpha x_2)$
$= \alpha(x_1, y_1, z_1, x_1) + \alpha(x_2, y_2, z_2, x_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha + \beta)\vec{u} = (\alpha + \beta)(x_1, y_1, z_1, x_1) = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1, (\alpha + \beta)z_1, (\alpha + \beta)x_1) = (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha y_1+\beta y_1, \alpha z_1+\beta z_1, \alpha x_1+\beta x_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha x_1)+(\beta x_1, \beta y_1, \beta z_1, \beta x_1) = \alpha(x_1, y_1, z_1, x_1) + \beta(x_1, y_1, z_1, x_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(x_1, y_1, z_1, x_1) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1, (\alpha\beta)z_1, (\alpha\beta)x_1)$
$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(x_1, y_1, z_1, x_1)) = \alpha(\beta x_1, \beta y_1, \beta z_1, \beta z_1) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)y_1, (\alpha\beta)z_1, (\alpha\beta)x_1)$
$\therefore (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

(ME4) $1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot (x_1, y_1, z_1, x_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1, 1 \cdot z_1, 1 \cdot x_1) = (x_1, y_1, z_1, x_1) = \vec{u}$

Como todas as propriedades são válidas, concluímos que V é espaço vetorial real.

(3) $V = \{(\frac{2}{3}y, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$.
Vamos verificar se as condições são válidas, para V ser um espaço vetorial real.
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (\frac{2}{3}y_1, y_1)$, $\vec{v} = (\frac{2}{3}y_2, y_2)$ e $\vec{w} = (\frac{2}{3}y_3, y_3)$.

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(\frac{2}{3}y_1, y_1) + (\frac{2}{3}y_2, y_2)] + (\frac{2}{3}y_3, y_3) = (\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2, y_1 + y_2) + (\frac{2}{3}y_3, y_3)$
$= (\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, y_1 + y_2 + y_3)$.

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\frac{2}{3}y_1, y_1) + [(\frac{2}{3}y_2, y_2) + (\frac{2}{3}y_3, y_3)] = (\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, y_1 + y_2 + y_3)$.
$\therefore (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(A2) $\vec{u} + \vec{v} = (\frac{2}{3}y_1, y_1) + (\frac{2}{3}y_2, y_2) = (\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2, y_1 + y_2) = (\frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_1, y_2 + y_1) = \vec{v} + \vec{u}$
$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(A3) $0 \in V$, pois tomando $y_1 = 0$, teremos que $\vec{u} = (0, 0) = \vec{0}$.
$\vec{u} + 0 = (\frac{2}{3}y_1, y_1) + (0, 0) = (\frac{2}{3}y_1 + 0, y_1 + 0) = (\frac{2}{3}y_1, y_1) = \vec{u}$

(A4) Dado $\vec{u} = (\frac{2}{3}y_1, y_1)$, existe $(-\vec{u}) = (\frac{-2}{3}y_1, -y_1)$ tal que:
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (\frac{2}{3}y_1, y_1) + (\frac{-2}{3}y_1, -y_1) = (\frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_1, y_1 - y_1) = (0, 0) = \vec{0}$

(ME1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha[(\frac{2}{3}y_1, y_1) + (\frac{2}{3}y_2, y_2)] = \alpha(\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2, y_1 + y_2) = (\alpha(\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha\frac{2}{3}y_1 + \alpha\frac{2}{3}y_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = (\alpha\frac{2}{3}y_1, \alpha y_1) + (\alpha\frac{2}{3}y_2, \alpha y_2) = \alpha(\frac{2}{3}y_1, y_1) + \alpha(\frac{2}{3}y_2, y_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(ME2) $(\alpha+\beta)\vec{u} = (\alpha+\beta)(\frac{2}{3}y_1, y_1) = ((\alpha+\beta)\frac{2}{3}y_1, (\alpha+\beta)y_1) = (\alpha\frac{2}{3}y_1+\beta\frac{2}{3}y_1, \alpha y_1+\beta y_1) = (\alpha\frac{2}{3}y_1, \alpha y_1) + (\beta\frac{2}{3}y_1, \beta y_1) = \alpha(\frac{2}{3}y_1, y_1) + \beta(\frac{2}{3}y_1, y_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(ME3) $(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(\frac{2}{3}y_1, y_1) = ((\alpha\beta)\frac{2}{3}y_1, (\alpha\beta)y_1)$
$\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha(\beta(\frac{2}{3}y_1, y_1)) = \alpha(\beta\frac{2}{3}y_1, \beta y_1) = ((\alpha\beta)\frac{2}{3}y_1, (\alpha\beta)y_1))$
$\therefore (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

(ME4) $1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot (\frac{2}{3}y_1, y_1) = (1 \cdot \frac{2}{3}y_1, 1 \cdot y_1) = (\frac{2}{3}y_1, y_1) = \vec{u}$

Como todas as propriedades são válidas, concluímos que V é espaço vetorial real.

(4) Vamos verificar se as condições são válidas, para V ser espaço vetorial.
Sejam A, B e $C \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:
$A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$.

(A1) $(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -b_1-b_2-b_3 \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -(b_1+b_2+b_3) \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$.

$A+(B+C) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} \right)$

$= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+a_3 & -b_2-b_3 \\ b_2+b_3 & a_2+a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -b_1-b_2-b_3 \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -(b_1+b_2+b_3) \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$.

$\therefore (A+B)+C = A+(B+C)$.

(A2) $A+B = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$

$B+A = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+a_1 & -b_2-b_1 \\ b_2+b_1 & a_2+a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+a_1 & -(b_2+b_1) \\ b_2+b_1 & a_2+a_1 \end{bmatrix}$

$\therefore A+B = B+A$.

(A3) $0 \in V$.
$A+0 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+0 & -b_1+0 \\ b_1+0 & a_1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$

(A4) Dado $A \in V$, existe $-A \in V$ tal que
$A+(-A) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+(-a_1) & -b_1+b_1 \\ b_1+(-b_1) & a_1+(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(ME1) $\alpha(A+B) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) & \alpha(-b_1 - b_2) \\ \alpha(b_1 + b_2) & \alpha(a_1 + a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \alpha a_2 & -\alpha b_1 - \alpha b_2 \\ \alpha b_1 + \alpha b_2 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & -\alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha a_2 & -\alpha b_2 \\ \alpha b_2 & \alpha a_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

(ME2) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a_1 & -(\alpha+\beta)b_1 \\ (\alpha+\beta)b_1 & (\alpha+\beta)a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 & -\alpha b_1 - \beta b_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & \alpha a_1 + \beta a_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & -\alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_1 & -\beta b_1 \\ \beta b_1 & \beta a_1 \end{bmatrix} = \alpha A + \beta A.$$

(ME3) $(\alpha\beta)A = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & -\alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta b_1 & \alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$

$$\alpha(\beta A) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta a_1 & -\beta b_1 \\ \beta b_1 & \beta a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta a_1 & -\alpha\beta b_1 \\ \alpha\beta b_1 & \alpha\beta a_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$

(ME4) $1.A = 1. \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 & 1 \cdot (-b_1) \\ 1 \cdot b_1 & 1 \cdot a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = A.$

Como todas condições são válidas, V é espaço vetorial.

(5) Note que $\vec{0} \notin V$, pois o espaço vetorial dado tem a condição $y \neq 0$. Desta forma V não é espaço vetorial, pois não satisfaz (A3).

(6) Vamos verificar se as condições são válidas, para V ser um espaço vetorial real. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$.

(A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1) + (x_3, y_3)$ $= (2(2x_1 - 2y_1) - 2(y_1 - x_1), (y_1 - x_1) - (2x_1 - 2y_1)) = (4x_1 - 4y_1 - 2y_1 + 2x_1, y_1 - x_1 - 2x_1 + 2y_1) = (6x_1 - 6y_1, 3y_1 - 3x_1).$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (2x_2 - 2y_2, y_2 - x_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$

$\therefore (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \neq \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Como (A1) não é satisfeito, concluímos que V não é espaço vetorial real.

(7) $V = \{(x, x, w^2, w) \in \mathbb{R}^4\}$
Seja $\vec{u} = (x_1, x_1, {w_1}^2, w_1) \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $x_1 = 0$, $w_1 = 1$ e $\alpha = -1$, note que $\alpha \cdot \vec{u} \notin V$:
$\alpha \cdot \vec{u} = -1 \cdot (0, 0, 1, 1) = (0, 0, -1, -1) \notin V$.
$\therefore V$ não é um espaço vetorial.

(8) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$. Note que (ME1) não é satisfeito:

(ME1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha^2(x_1 + x_2), \alpha^2) = (\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2, \alpha^2)$

$\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2) + (\alpha^2 x_2, \alpha^2) = (\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2, \alpha^2 + \alpha^2) = (\alpha^2 x_1 + \alpha^2 x_2, 2\alpha^2)$
$\therefore \alpha(\vec{u} + \vec{v}) \neq \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Como (ME1) não é satisfeito, concluímos que V não é espaço vetorial real.

(9) Vamos verificar se as condições são válidas, para V ser espaço vetorial.
Sejam A, B e $C \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:
$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$.

(A1) $(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0+0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & 0+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+0 & a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & 0+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C)$.

(A2) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$

$$B + A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A + B = B + A$.

(A3) $0 \in V$.

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & a_1 + 0 \\ b_1 + 0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(A4) Dado $A \in V$, existe $-A \in V$ tal que
$A + (-A) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & a_1 + (-a_1) \\ b_1 + (-b_1) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(ME1) $\alpha(A+B) = \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} 0+0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0+0 \end{bmatrix} \right)$
$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 & \alpha(a_1+a_2) \\ \alpha(b_1+b_2) & \alpha \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ \alpha b_1 + \alpha b_2 & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha A + \alpha B = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & \alpha \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 & \alpha a_2 \\ \alpha b_2 & \alpha \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ \alpha b_1 + \alpha b_2 & 0+0 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ \alpha b_1 + \alpha b_2 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

(ME2) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta) \cdot 0 & (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)b_1 & (\alpha+\beta) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 & \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & 0 \end{bmatrix}$
$\alpha A + \beta A = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & \alpha \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot 0 & \beta a_1 \\ \beta b_1 & \beta \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & 0+0 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

(ME3) $(\alpha\beta)A = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \cdot 0 & \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta b_1 & \alpha\beta \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta b_1 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha(\beta A) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta \cdot 0 & \beta a_1 \\ \beta b_1 & \beta \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta b_1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(ME4) $1.A = 1. \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 & 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot b_1 & 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = A$.

Como todas condições são válidas, V é espaço vetorial.

(10) Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$. Note que (A4), não é satisfeito:

(A4) Dado $\vec{u} = (x_1, y_1)$, existe $(-\vec{u}) = (-x_1, -y_1)$ tal que:
$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (-x_1 x_1, -y_1 y_1) = (-x_1^2, -y_1^2) \neq \vec{0}$

Como (A4) não é satisfeito, concluímos que V não é espaço vetorial real.

Seção 2.3

(1) (a) Note, que a matriz $\mathbf{A}$ possui 4 linhas e 4 colunas. Logo, sua ordem é 4×4;

(b) $a_{23} = 20$, $a_{42} = 10$, $a_{32} = 20$ e $a_{24} = 10$;

(c) Sim. A matriz $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, pois $a_{ij} = a_{ji}$.

(2) (a) Matriz linha;

(b) Matriz quadrada;

(c) Matriz coluna;

(d) Matriz anti simétrica.

(3) A definição de uma matriz simétrica é quando $a_{ij} = a_{ji}$.

(a) Assim, teremos que $a_{12} = a_{21} \Rightarrow x = 8$;

(b) Teremos que:
$a_{12} = a_{21} \Rightarrow x + 2 = 8 \Leftrightarrow x = 6$;
$a_{23} = a_{32} \Rightarrow y - 35 = 28 \Leftrightarrow y = 63$
$a_{31} = a_{13} \Rightarrow z + 1 = 5 \Leftrightarrow z = 4$

(4) (a) Não é possível realizar a operação matricial, pois as matrizes não são da mesma ordem;

(b) É possível. A ordem é 4×4;

(c) Não é possível realizar a operação matricial, pois as matrizes não são da mesma ordem;

(d) É possível. A ordem é 3×4

(5) (a) Não é possível realizar a operação matricial, pois as matrizes não são da mesma ordem;

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 61 \\ 79 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 69 \\ 85 & 32 \end{pmatrix}$;

(c) Não é possível realizar a operação matricial, pois as matrizes não são da mesma ordem;

(d) $\mathbf{D} + \mathbf{0_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} 13 & 66 & 129 \\ 79 & 25 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 66 & 129 \\ 79 & 25 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $\mathbf{3A} + \mathbf{2B} = 3 \begin{pmatrix} 165 & 198 & -64 & 964 \\ 81 & -9 & 16 & 25 \\ -42 & 54 & 345 & -54 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 254 & -19 & 46 & 469 \\ -18 & 23 & 387 & 426 \\ 4259 & 22 & 10 & 20 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 495 & 594 & -192 & 2892 \\ 243 & -27 & 48 & 75 \\ -126 & 162 & 1035 & -162 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 508 & -38 & 92 & 938 \\ -36 & 46 & 774 & 852 \\ 8518 & 44 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1003 & 556 & 100 & 3830 \\ 207 & 19 & 822 & 927 \\ 8392 & 206 & 1055 & -122 \end{pmatrix}$$

(7) $\mathbf{0_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 \\ a+3c & -b \\ -2b & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+1 & 0 \\ a+3c & -b \\ -2b & 0 \end{pmatrix}$

$a+b+1=0$ (i)
$a+3c=0$ (ii)
$-b=0 \Leftrightarrow b=0$ (iii)

Substituindo (iii) em (i), teremos que:
$a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$ (iv)
Substituindo (iv) em (ii), teremos que:
$-1+3c=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$
$\therefore a=-1$; $b=0$ e $c=\frac{1}{3}$.

(8) $\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

$\therefore x=0$ e $y=1$

(9) Definindo a matriz $\mathbf{X}$, como:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Teremos que:
$3(\mathbf{X}+\mathbf{A}) = 2(\mathbf{B}+\mathbf{X}) + 5\mathbf{C}$

$\mathbf{3}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{2}\left(\begin{pmatrix} 42 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right)$
$\begin{pmatrix} 3x_1+48 & 3x_2+75 \\ 3x_3+108 & 3x_4+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 104+2x_1 & -20+2x_2 \\ 2x_3+5 & 7+2x_4 \end{pmatrix}$
Teremos que:

$3x_1+48 = 104+2x_1 \Rightarrow x_1 = 56$;
$3x_2+75 = -20+2x_2 \Rightarrow x_2 = -95$;
$3x_3+108 = 2x_3+5 \Rightarrow x_3 = -103$;
$3x_4+27 = 7+2x_4 \Rightarrow x_4 = -20$

$\therefore \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 56 & -95 \\ -103 & -20 \end{pmatrix}$

Seção 3.5

(1) $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & -4 \\ 16 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 0 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 30 & 29 \\ -58 & 12 \\ 185 & 77 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -662 & 377 \\ 1416 & 156 \\ -4286 & 1001 \end{pmatrix}$

$\therefore \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -662 & 377 \\ 1416 & 156 \\ -4286 & 1001 \end{pmatrix}$

(2) (a) $2\mathbf{D} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{H} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 24 & 41 \\ 65 & 25 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 252 & 148 & 94 \\ 862 & 638 & 534 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 & 155 & 93 \\ 853 & 644 & 534 \end{pmatrix}$

(b) Note que:
$\mathbf{E}_{3\times 3} \cdot \mathbf{F}_{3\times 2} + \mathbf{G}_{2\times 3} \cdot \mathbf{E}_{3\times 3} = (\mathbf{EF})_{3\times 2} + (\mathbf{GE})_{2\times 3}$
$\therefore$ Não é possível realizar a operação de adição, pois as matrizes não possuem a mesma ordem.

(c) Note que:
$\mathbf{D}_{2\times 2} \cdot 5\mathbf{H}_{2\times 3} + \mathbf{G}_{2\times 3} \cdot (-3)\mathbf{F}_{3\times 2} = 5(\mathbf{DH})_{2\times 3} - 3(\mathbf{GF})_{2\times 2}$
$\therefore$ Não é possível realizar a operação de adição, pois as matrizes não possuem a mesma ordem.

(d) Pela propriedade de multiplicação de matrizes, temos que: $\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$. Logo:
$\mathbf{I_3} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 20 & 9 \\ -19 & 54 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 20 & 9 \\ -19 & 54 & 32 \end{pmatrix}$

(3) Vamos verificar as propriedades da transposição de matrizes, por meio dos exercícios a seguir:

(a) $(\mathbf{G} + \mathbf{H})^t = \mathbf{G}^t + \mathbf{H}^t$

$\left(\begin{pmatrix} -4 & 24 & 41 \\ 65 & 25 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 65 \\ 24 & 25 \\ 41 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 7 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 31 & 40 \\ 56 & 31 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -4 & 56 \\ 31 & 31 \\ 40 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 56 \\ 31 & 31 \\ 40 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 56 \\ 31 & 31 \\ 40 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $(2 \cdot \mathbf{D})^t = 2 \cdot \mathbf{D}^t$

$$\left(2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\6&7\end{pmatrix}\right)^t = 2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\6&7\end{pmatrix}^t \Rightarrow \begin{pmatrix}2&4\\12&14\end{pmatrix}^t = 2\cdot\begin{pmatrix}1&6\\2&7\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2&12\\4&14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&12\\4&14\end{pmatrix}$$

(c) $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{F})^t = \mathbf{F}^t\mathbf{E}^t$

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\8&20&9\\-19&54&32\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&13\\97&54\\20&21\end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix}0&13\\97&54\\20&21\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\8&20&9\\-19&54&32\end{pmatrix}^t$$
$$\begin{pmatrix}20&34\\2120&1373\\5878&3341\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}20&2120&5878\\34&1373&3341\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}20&2120&5878\\34&1373&3341\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20&2120&5878\\34&1373&3341\end{pmatrix}$$

(d) $(\mathbf{D}^t)^t = \mathbf{D}$

$$\left(\begin{pmatrix}1&2\\6&7\end{pmatrix}^t\right)^t = \begin{pmatrix}1&6\\2&7\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1&2\\6&7\end{pmatrix}$$

(4) $$\mathbf{J} = \mathbf{I^2} - \mathbf{I^t} = \begin{pmatrix}1&4&-6\\0&2&-3\\5&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&-6\\0&2&-3\\5&-2&-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&5\\4&2&-2\\-6&-3&-3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-29&24&0\\-15&10&3\\-10&22&-15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&5\\4&2&-2\\-6&-3&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30&24&-5\\-19&8&5\\-4&25&-12\end{pmatrix}$$

(5) Utilizando o método para inversão de matrizes, teremos:

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-6&-12&1&0&0\\6&0&4&0&1&0\\12&-4&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\Leftrightarrow L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&4&0&1&0\\0&-6&-12&1&0&0\\12&-4&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to\frac{1}{6}\cdot L_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&0\\0&-6&-12&1&0&0\\12&-4&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_3\to L_3-12\cdot L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&0\\0&-6&-12&1&0&0\\0&-4&-8&0&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to\frac{-1}{6}\cdot L_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&0\\0&1&2&\frac{-1}{6}&0&0\\0&-4&-8&0&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_3\to L_3+4\cdot L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&0\\0&1&2&\frac{-1}{6}&0&0\\0&0&0&\frac{-2}{3}&-2&1\end{array}\right)$$

Note que não será possível encontra uma $\mathbf{I_3}$ no lugar da matriz dada, logo não é inversível.

(b) $$\left(\begin{array}{cc|cc}20&-10&1&0\\6&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to\frac{1}{20}\cdot L_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{20}&0\\6&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to L_2-6\cdot L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 8 & \frac{-6}{20} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \to \frac{1}{8}\cdot L_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{80} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_1 \to L_1 + \frac{1}{2}\cdot L_2}$$
$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{80} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

A matriz dada é inversível e sua inversa é: $\begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{1}{16} \\ \frac{-3}{80} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(c) $$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \Leftrightarrow L_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \to L_2 - 4\cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_3 \to L_3 - 6\cdot L_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_3 \Leftrightarrow -L_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}\cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \to L_2 + \frac{3}{2}\cdot L_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

A matriz dada é inversível e sua inversa é: $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(6) (a) $\mathbf{K}\cdot\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 12 \\ 100 & 74 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{L}\cdot\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 16 \\ 100 & 64 \end{pmatrix}$

(7) (a) $$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \Leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{}_{L_2 \to L_2 - 3\cdot L_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{}_{L_2\to\frac{-1}{2}\cdot L_2}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to L_1-2\cdot L_2}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to L_2+\frac{1}{2}L_1}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to 2\cdot L_2}$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to L_1+2\cdot L_2}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\therefore (\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{M}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2\end{pmatrix}$

(d) $(\mathbf{M}^t)^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to\frac{1}{3}L_1}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to L_2-4\cdot L_1}$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to\frac{3}{2}\cdot L_2}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to L_1-\frac{1}{3}\cdot L_2}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore (\mathbf{M}^t)^{-1} = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(e) $(\mathbf{M}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

(8) $\mathbf{N} = \mathbf{N}^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & x^2 \\ 2x-1 & 30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2x-1 \\ x^2 & 30\end{pmatrix}$
Teremos que:
$x^2 = 2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

(9) Primeiro, vamos determinar $\mathbf{Q}^t$:
$\mathbf{Q^t} = \begin{pmatrix} 50 & 13 & -1 \\ 9 & 1 & 2\end{pmatrix}$
Realizando a adição entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}^t$:
$\mathbf{P}+\mathbf{Q^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -20\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 & 13 & -1 \\ 9 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 13 & 2 \\ 13 & 3 & -18\end{pmatrix}$
Obtendo $\mathbf{O}^{-1}$:
$\left(\begin{array}{cc:cc} 6 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_1\to\frac{1}{6}L_1}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{}_{L_2\to L_2-2\cdot L_1}$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to \frac{3}{4} \cdot L_2]{} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{4}{3} \cdot L_2]{} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\therefore \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Realizando o produto entre $\mathbf{R}$ e $\mathbf{O}^{-1}$:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 19 \\ 25 & 7 \\ 69 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-25}{4} & \dfrac{69}{4} \\ \dfrac{43}{4} & \dfrac{-79}{4} \\ \dfrac{133}{4} & \dfrac{-261}{4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q^t}) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O^{-1}}) = \begin{pmatrix} 51 & 13 & 2 \\ 13 & 3 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{-25}{4} & \dfrac{69}{4} \\ \dfrac{43}{4} & \dfrac{-79}{4} \\ \dfrac{133}{4} & \dfrac{-261}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-225}{2} & \dfrac{985}{2} \\ \dfrac{-1295}{2} & \dfrac{2679}{2} \end{pmatrix}$$

(10) (a) Falso. Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, uma matriz triangular superior, teremos que a sua transposta será $\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$, uma matriz triangular inferior.

(b) Verdadeiro. Por meio da propriedade da matriz transposta, temos que: $(A^t)^t = A$. Logo, ao utilizar as matrizes dadas na alternativa anterior, concluíremos que a transposta da matriz triangular inferior é a matriz triangular superior.

(c) Falso. Dadas duas matrizes simétricas de mesmna ordem, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Teremos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, não resultará em uma matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$$

(d) Falso. Seja $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, uma matriz com a primeira coluna constituída somente de zeros e $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, uma matriz qualquer e com a mesma ordem de $\mathbf{C}$. Note que o resultado do produto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$, não terá a primeira coluna constituída somente de zeros:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(e) Falso. Sejam $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, matrizes simétricas. Teremos que:

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$ e
$\mathbf{F}\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$
$\therefore$ Note que, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{F} \neq \mathbf{F}\cdot\mathbf{E}$.

(f) Falso. Sejam $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, matrizes de ordem 2. Teremos que:
$-\mathbf{G}\cdot -\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ e
$-(\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -22 \\ -43 & -50 \end{pmatrix}$
$\therefore$ Note que, $-\mathbf{G}\cdot -\mathbf{H} \neq -(\mathbf{G}\cdot\mathbf{H})$.

(g) Verdadeiro. Seja $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, uma matriz com a primeira linha constituída somente de zeros e $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, uma matriz qualquer e com a mesma ordem de $\mathbf{I}$. Note que o resultado do produto $\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}$, terá a primeira linha constituída somente de zeros:
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
$\therefore$ O produto entre duas matrizes, onde a primeira é constituída somente de zeros, terá uma matriz resultante com a primeira linha também nula.

Seção 4.3

(1) (a) Vamos utilizar o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to 2L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to 2L_3 + L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to 7L_3 + 5L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{22}L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{-1}{7}L_2 + \frac{3}{7}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_1 \to L_1 + L_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_1 \to \tfrac{1}{2}L_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Reescrevendo a matriz ampliada como um sistema, teremos que:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ O sistema é compatível e determinado. S = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Vamos utilizar o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \frac{-14}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] L_2 \to \tfrac{14}{3}L_2 + L_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} \frac{-14}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-25}{3} & 15 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + \tfrac{3}{7}L_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \frac{-14}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-25}{3} & 15 & 1 \\ 0 & \frac{10}{7} & \frac{-18}{7} & \frac{17}{7} \end{array}\right] L_3 \to L_3 + \tfrac{4}{5}L_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} \frac{-14}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-25}{3} & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{array}\right]$$

Reescrevendo a matriz ampliada como um sistema, teremos que:

$$\begin{cases} \frac{-14}{3}x + y + z = 1 \\ \frac{-25}{3}y + 15z = 1 \\ 0 = \frac{13}{5} \end{cases}$$

$\therefore$ Não existe solução $\nexists$. O sistema é incompatível.

(2) (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

(3) (a) No exercício anterior letra a, já escrevemos o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$. Para utilizar o método da matriz inversa é necessário calcular a matriz

inversa de A, caso exista, a solução do sistema pode ser dado da seguinte maneira: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to \frac{1}{7}L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{array}\right] \longrightarrow_{L_1 \to L_1 + 3L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$. Desta forma, a solução será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \cdot 9 + \frac{1}{7} \cdot -13 \\ \frac{1}{7} \cdot 9 + \frac{-2}{7} \cdot -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{7} - \frac{13}{7} \\ \frac{9}{7} + \frac{26}{7} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) No exercício anterior letra b, já escrevemos o sistema dado na forma matricial, $A \cdot X = B$. Encontrando a inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 2L_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 5L_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & -36 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \to \frac{-1}{5}L_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & -19 & -36 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_1 \to L_1 - 4L_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & -19 & -36 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 + 19L_2 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-28}{5} & \frac{13}{5} & \frac{-19}{5} & 1 \end{array}\right] L_3 \to \frac{-5}{28}L_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{28} & \frac{19}{28} & \frac{-5}{28} \end{array}\right]$$

$$L_1 \to L_1 - \frac{3}{5}L_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-9}{28} & \frac{11}{28} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{28} & \frac{19}{28} & \frac{-5}{28} \end{array}\right] L_2 \to L_2 - \frac{8}{5}L_3 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-9}{28} & \frac{11}{28} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{28} & \frac{19}{28} & \frac{-5}{28} \end{array}\right]$$

Assim, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-9}{28} & \frac{11}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-13}{28} & \frac{19}{28} & \frac{-5}{28} \end{bmatrix}$. Desta forma, a solução será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-9}{28} & \frac{11}{28} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-13}{28} & \frac{19}{28} & \frac{-5}{28} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-9}{28} \cdot 2 & \frac{11}{28} \cdot 2 & \frac{3}{28} \cdot 8 \\ \frac{8}{7} \cdot 2 & \frac{-9}{7} \cdot 2 & \frac{2}{7} \cdot 8 \\ \frac{-13}{28} \cdot 2 & \frac{19}{28} \cdot 2 & \frac{-5}{28} \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-18}{28} + \frac{22}{28} + \frac{24}{28} \\ \frac{16}{7} + \frac{-18}{7} + \frac{16}{7} \\ \frac{-26}{28} + \frac{38}{28} + \frac{-40}{28} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(4) Utilizando o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -a & 0 \end{array}\right] L_2 \to 2L_2 - L_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -a & 0 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - L_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -a-2 & 0 \end{array}\right] L_3 \to 7L_3 - 5L_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7(-a-2) & 0 \end{array}\right]$$

Assim, temos que:
$7(-a-2) = 0 \Rightarrow -7a - 14 = 0 \Rightarrow -7a = 14 \Rightarrow a = -2$

(5) Utilizando o método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] L_1 \Leftrightarrow L_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - aL_1 \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - L_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$L_3 \to L_3 - \tfrac{1-a}{1-a^2}L_{2}\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & \frac{a^2+a-2}{1+a} & \frac{a-1}{1+a} \end{array}\right]$$

Note que, se:

$$\frac{a^2+a-2}{1+a} = \frac{a-1}{1+a} \Leftrightarrow a^2+a-2-a+1=0 \Leftrightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow a=\pm 1$$

.

E se: $\dfrac{a^2+a-2}{1+a} = 0 \Leftrightarrow a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a_1 = 1$ e $a_2 = -2$.

(a) O sistema será compatível e determinado se $\frac{a^2+a-2}{1+a} \neq 0$, neste caso será quando $a \neq -2$ e $a \neq 1$.

(b) O sistema será compatível e indeterminado se $\frac{a^2+a-2}{1+a} = 0$ e $\frac{a-1}{1+a} = 0$, neste caso será quando $a = 1$.

(c) O sistema será incompatível se $a = -2$.

(6) (a) Determinando a inversa de A:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \Leftrightarrow L_{2}\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \longrightarrow L_3 - L_{1}\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_1 \longrightarrow L_1 - L_{2}\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] L_3 \longrightarrow L_3 - L_{2}\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] L_3 \longrightarrow -L_{3}\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_{3}\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \mathbf{A^{-1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Utilizando o método da matriz inversa: $X = A^{-1}B$.
Para $k = 1$:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para $k = 2$:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(7) Utilizando o método de Gauss:
$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 8 & 3 \end{array}\right] L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-4 & 8-2a & 1 \end{array}\right]$

Reescrevendo a matriz ampliada como um sistema, teremos que:

$$\begin{cases} x + 2y + az = 1 \\ (a-4)y + (8-2a)z = 1 \end{cases}$$

Isolando y na última equação, teremos:

$$y = \frac{1 + (2a-8)}{(a-4)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{(a-4)} + 2z$$

Substituindo o valor de y na primeira equação do sistema, teremos:

$$x = 1 - \frac{2}{a-4} - 4z - az$$

$\therefore$ A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{a-4} - 4z - az \\ \dfrac{1}{(a-4)} + 2z \\ z \end{bmatrix}$

(8) Representando as cidades Lisboa, Paris e Roma pelas variavéis x, y e z respectivamente, poderemos escrever as informações fornecidas pelo problema como um sistema linear da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y = 2(x+z) \\ z = 2 + \dfrac{1}{2}x \\ x + y + z = 78 \end{cases}$$

Utilizando o método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 78 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - \tfrac{1}{4}L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 78 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - \tfrac{1}{2}L_1 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} & \vdots & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \vdots & 78 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 6L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 9 & \vdots & 90 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \tfrac{1}{9}L_3 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow 4L_2 + 6L_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 52 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2}L_1 + \tfrac{1}{2}L_2 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 26 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 52 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 16 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 52 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 10 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 16 \\ 52 \\ 10 \end{bmatrix}$

Portanto, o total de passsagens vendidas conjuntamente para Paris e Roma é $y + z = 52 + 10 = 62$.

(9) Respresentando a quantidade de comprimidos consumidos por Pedro, Márcia e João, como x, y e z, respectivamente, poderemos escrever as informações fornecidas pelo problema como um sistema linear da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y + z = 130 \\ 10x + 4y + 2z = 780 \end{cases}$$

Utilizando o método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 130 \\ 10 & 4 & 2 & \vdots & 780 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \vdots & 130 \\ 10 & 4 & 2 & \vdots & 780 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 10L_1 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \vdots & 130 \\ 0 & 34 & 2 & \vdots & 780 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow \tfrac{1}{4}L_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{65}{2} \\ 0 & 34 & 2 & \vdots & 780 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 34L_2 \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{65}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-13}{2} & \vdots & -325 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \frac{-2}{13} L_{3\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{65}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 50 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{1}{4} L_{3\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 50 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + 3L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 60 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 50 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 50 \end{bmatrix}$

Portanto, Márcia ingere mensalmente 20 comprimidos.

(10) O sistema linear do problema é da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 31 \\ x + 6y + 4z = 31 \\ x + 4y + 7z = 31 \end{cases}$$

Utilizando o método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 1 & 6 & 4 & \vdots & 31 \\ 1 & 4 & 7 & \vdots & 31 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow 3L_2 - L_{1\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 14 & 10 & \vdots & 62 \\ 1 & 4 & 7 & \vdots & 31 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow 3L_3 - L_{1\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 14 & 10 & \vdots & 62 \\ 0 & 8 & 19 & \vdots & 62 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow 14L_3 - 8L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 14 & 10 & \vdots & 62 \\ 0 & 0 & 186 & \vdots & 372 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow \frac{1}{186} L_{3\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 14 & 10 & \vdots & 62 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow \frac{1}{14} L_{2\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 1 & \frac{10}{14} & \vdots & \frac{62}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 - \frac{10}{14} L_{3\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \vdots & 31 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow \frac{1}{3} L_{1\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{31}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - \frac{4}{3} L_{2\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - \frac{2}{3} L_{3\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Seção 5.4

(1) **(Falso)** Dada uma matriz $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, teremos que:

$det(5A) = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 100 - 150 = -50$ e $5\ detA = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (4 - 6) = -10$

$\therefore$ Note que $det(5A) \neq 5det(A)$.

(Verdadeiro) Pela propriedade de determinantes $det(AB) = detA{\cdot}detB = (-2)(-3) = 6$

(Falso) Considere as matrizes, $\mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{E} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, teremos que:

$\mathbf{D} + \mathbf{E} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ e $det(D + E) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 20 = -16.$

$detD = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ e $detE = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3.$

Assim, $detD + detE = -2 - 3 = -5$

$\therefore det(D + E) \neq detD + detE$

(Verdadeiro) Dada a matriz $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, teremos que:

$detF = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2$ e $det(-F) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2.$

(Verdadeiro) Dada $\mathbf{I_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, teremos que:

$detI_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$

(2) (a) $detH = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 60 - (10 + 27 + 32) = 84 - 69 = 15$

(b) Temos que $H^2 = H \cdot H$, logo $detH^2 = det(H \cdot H) = detH \cdot detH = 15 \cdot 15 = 225.$

(3) Pela propriedade de determinante: $det(aJ) = a \cdot detJ$, logo **a** será:

$$a = \frac{det(aJ)}{detJ} = \frac{600}{5} = 120.$$

(4) (a) $\begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 10 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$
$= 1 \cdot 0 - 10(0-2) + 0 = 20$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$
$= 2(72-72) - 6(36-36) + 8(24-24) = 0$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \\ 10 & 12 & 13 \end{vmatrix} + 0 \cdot$
$(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 13 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$
$= 0 + 0 + 0 - 1[168 - 80 + 264 - (280 + 176 - 72)] = -352 + 384 = 32$

(5) (a) Note que, $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ é a transposta da matriz. Por meio da propriedade de determinantes: $detA = detA^t$, temos que $det = 10$.

(b) Neste caso, há duas colunas iguais. Assim, $\begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix} = 0.$

(c) Note que houve a troca das duas primeiras linhas, portanto $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10.$

(d) Neste caso a primeira linha foi multiplicada por 7, assim $\begin{vmatrix} 7a & 7b & 7c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7 \cdot 10 =$ 70

(6) $\triangle_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)[-10 - (-6)] = 4$

(7) Temos que: $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} adjA$

(a) $detA = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 10 = -10.$

Agora encontraremos a matriz adjunta, que para tal é necessário da matriz dos cofatores de A:

$\triangle_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$
$\triangle_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$
$\triangle_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5$
$\triangle_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 0 = 0$

Logo, a matriz cofatores de A, será: $\triangle = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Por conseguinte, $adjA = \triangle^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\therefore A^{-1} = \frac{-1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$

(b) $detA = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 8 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 7 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$
$9 \cdot (5-8) - 8 \cdot (6-12) + 7 \cdot (12-15) = -27 + 48 - 21 = 0$

Como $detA = 0$, teremos $A^{-1} = \frac{1}{0} adjA = \nexists$. Portanto, a matriz não tem inversa.

(c) $detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot (-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$
$(-1)^{3+4} 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot [2 - (-3)] + 0 + 0 - 1 \cdot$
$[2 - (-3 - 8)] = 10 - 13 = -3$

Agora encontraremos a matriz adjunta, que para tal é necessário da matriz dos cofatores de A:

$\triangle_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$\triangle_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$

$\triangle_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$

$$\triangle_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$\triangle_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\triangle_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\triangle_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\triangle_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\triangle_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\triangle_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\triangle_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\triangle_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\triangle_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$\triangle_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\triangle_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

Logo, a matriz cofatores de A, será: $\triangle = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & -3 & 6 \\ 10 & 8 & -4 & 13 \end{bmatrix}$.

Por conseguinte, $adjA = \triangle^t = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ -5 & 4 & 6 & 13 \end{bmatrix}$.

$\therefore A^{-1} = \dfrac{-1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 4 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ -5 & 4 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} & -2 & \frac{-10}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & -1 & \frac{-8}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} & -2 & \frac{-13}{3} \end{bmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 2+x & 1 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

$(2+x)(2+x) - 3 = 0 \Rightarrow 4 + 2x + 2x + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{3}$ e $x_2 = -1 - \sqrt{3}$.

(9) Pelo método da matriz adjunta, L será invertível se:

$$L^{-1} = \frac{1}{detL} adjL$$

Assim, L será invertível se $detL \neq 0$.

$detL = \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 30 - (-2x) \neq 0 \Rightarrow 30 + 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 15.$

(10) Encontrando a matriz adjunta de M:

$\triangle_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$\triangle_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17$

$\triangle_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$

$\triangle_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$\triangle_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$\triangle_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$\triangle_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 30$

$$\triangle_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4$$

$$\triangle_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

Logo, a matriz cofatores de A, será: $\triangle = \begin{bmatrix} -3 & 17 & 6 \\ -2 & -8 & 4 \\ 30 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Por conseguinte, $adjA = \triangle^t = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 30 \\ 17 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Seção 6.2

(1) Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para W. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (-2y_1, y_1, 5y_1)$ *e* $\vec{v} = (-2y_2, y_2, 5y_2)$.

(i) Tomando $y_1 = 0$, teremos que $\vec{0} \in W$, pois $(-2 \cdot 0, 0, 5 \cdot 0) = (0, 0, 0, 0)$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (-2y_1, y_1, 5y_1) + (-2y_2, y_2, 5y_2) = (-2y_1 - 2y_2, y_1 + y_2, 5y_1 + 5y_2) = (-2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, 5(y_1 + y_2))$. Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

(iii) $\alpha\vec{u} = \alpha(-2y_1, y_1, 5y_1) = (-2\alpha y_1, \alpha y_1, 5\alpha y_1)$. Portando, $\alpha\vec{u} \in W$.
Como todas as condições foram verificadas concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(2) Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para W. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (x_1, y_1, 0, t_1)$ *e* $\vec{v} = (x_2, y_2, 0, t_2)$.

(i) O vetor $(0, 0, 0, 0) \in W$, já que $z = 0$ e $2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, 0, t_1) + (x_2, y_2, 0, t_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0, t_1 + t_2)$. Então: $2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (t_1 + t_2) = 2x_1 + y_1 - t_1 + 2x_2 + y_2 - t_2 = 0 + 0 = 0$.
Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

(iii) $\alpha\vec{u} = \alpha(x_1, y_1, 0, t_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha 0, \alpha t_1)$.
Então: $2\alpha x_1 + \alpha y_1 - \alpha t_1 = \alpha(2x_1 + y_1 - t_1) = \alpha 0 = 0$.
Portando, $\alpha\vec{u} \in W$. Como todas as condições foram verificadas concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(3) Temos que $W = \{A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)} : a_{11} \leq 0\} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$. Considere $\alpha = -1$ e $B \in W$, tal que:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Note que, $\alpha \cdot B \notin W$, pois $b_{11} \geq 0$:

$$-\mathbf{1} \cdot \mathbf{B} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mn} \end{pmatrix}$$

Como (iii) não foi verificado, concluímos que W não é subespaço vetorial de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(4) Verifiquemos se W satisfaz as condições de subespaço vetorial:
Sejam $X, Y \in A$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $X = \begin{bmatrix} a_1 & c_1+1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} a_2 & c_2+1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$.

(i) $0 \notin A$, pois tendo $a_1 = c_1 = d_1 = 0$, teremos $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como (i) não foi verificado, concluímos que W não é subespaço vetorial de M_2.

(5) Verifiquemos se A satisfaz as condições de subespaço vetorial:
Sejam $X, Y \in A$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$.

(i) Com $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, teremos que:
$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, portanto $0 \in A$.

(ii) $X + Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$
Logo, $X + Y \in A$.

(iii) $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$
Logo, $\alpha X \in A$.

Como todas as condições foram verificadas concluímos que A é subespaço vetorial de M_2.

(6) Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para W. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (x_1, 3x_1)$ *e* $\vec{v} = (x_2, 3x_2)$.

(i) Tomando $y_1 = 0$, teremos que $\vec{0} \in W$, pois $(0, 3 \cdot 0) = (0, 0)$.

(ii) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1, 3x_1) + (x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2) = (x_1 + x_2, 3(x_1 + x_2))$.
Logo, $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

(iii) $\alpha\vec{u} = \alpha(x_1, 3x_1) = (\alpha x_1, 3\alpha x_1)$. Portando, $\alpha\vec{u} \in W$.
Como todas as condições foram verificadas concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

(7) Vamos verificar se valem as condições de subespaço vetorial para W. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$.

(i) O vetor $(0, 0, 0) \notin W$, pois considerando $x = y = z = 0$, teremos $0 - 0 + 2 \cdot 0 = 4$ e $0 \neq 4$.
$\therefore W$ não é subespaço vetorial.

(8) Sejam $X, Y \in W$ matrizes triangulares superiores de ordem 3, tais que $X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Vamos verificar se satisfazem as condições dos subespaços vetoriais.

(i) Com $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$, teremos que:
$0 \in W$, pois $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, portanto $0 \in W$.

(ii) $$X + Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ 0 & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Logo $X + Y \in W$.

(iii) $\alpha X = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha 0 & \alpha 0 & \alpha a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$. Logo, $\alpha X \in W$.

Como todas as condições foram verificadas concluimos que W é subespaço vetorial de M_3.

(9) Seja $\vec{u} = (1, 2, 3) \in W$, note que a condição (iii) não é satisfeita, pois: $-1\vec{u} = -1 \cdot (1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \notin W$, visto que $x \geq y \geq z$. Portanto, W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(10) Seja $\vec{u} = (2, 2, 8) \in W$ e note que, a condição (iii) não é satisfeita, já que $-1 \cdot u = -1 \cdot (2, 2, 8) = (-2, -2, -8) \notin W$, pois $z = x^2 + y^2$ não é satisfeito. Portanto, W não é subespaço vetorial de R^2.

Seção 7.3

(1) Tomando um elemento $u = (x, y) \in U$, temos que $y = 2x$, logo podemos escrever:

$$u = (x, y) = (x, 2x) = x(1, 2)$$

com $x \in \mathbb{R}$. Note que, qualquer elemento de U pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S, logo S é um conjunto de geradores para U.

(2) Para mostrar que S gera o $\mathbb{R}^2$, temos que mostrar que qualquer elemento de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S. Tomando $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$u = (a, b) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a \\ \alpha_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a - b \\ \alpha_2 = b \end{cases}$$

Assim, todo elemento $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como:

$$(a - b)(1, 0) + b(1, 1)$$

$\therefore$ O conjunto S é um conjunto de geradores para o $\mathbb{R}^2$.

(3) Considerando um elemento qualquer $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, para que $u \in S$ é necessário mostrar que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S, ou seja:

$$u = (a, b, c) = \alpha_1(2, 1, 0) + \alpha_2(0, 3, 4) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = b \\ 4\alpha_2 = c \end{cases}$$

Isolando a primeira equação, teremos: $\alpha_1 = \dfrac{a}{2}$. E isolando a terceira: $\alpha_2 = \dfrac{c}{4}$. Substituindo tais valores na segunda equação teremos que: $b = \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{4}$, com $a, c \in \mathbb{R}$.

Assim, $u = (a, b, c) = \dfrac{a}{2}(2, 1, 0) + \dfrac{c}{4}(0, 3, 4)$. Portanto, o conjunto S gera o subespaço dado por:

$$\mathrm{U} = \{\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) = \frac{a}{2}(2, 1, 0) + \frac{c}{4}(0, 3, 4), \text{ com } b = \frac{a}{2} + \frac{c}{4} \text{ e } a, c \in \mathbb{R}\}$$

(4) Vamos encontrar o conjunto de geradores para W_1 e W_2. Um elemento de W_1 pode ser escrito da forma:

$$(a, b, 0) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)$$

Assim, $W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$.
Um elemento de W_2 pode ser escrito da forma:

$$(c, c, c) = c(1, 1, 1)$$

Assim, $W_2 = [(1, 1, 1)]$.

(a) Dessa forma, temos que $W_1 + W_2 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)]$, pois é a união dos conjuntos geradores de W_1 e W_2. Logo $\mathbb{R}^3 \subset W_1 + W_2$ e portanto $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

(b) $W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 0)]$.

(5) (a) Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que:

$$(x, y) = (\frac{2x + y}{4}, \frac{2x + y}{2}) + (\frac{2x - y}{4}, \frac{y - 2x}{2}) \in W_1 + W_2$$

Logo $\mathbb{R}^2 \subset W_1 + W_2$ e portanto $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$.

(b) Temos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$, logo $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

(6) A soma será direta se: $W = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Neste caso, temos que:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ Como $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, a soma não é direta.

(7) Caracterizando W_1, teremos que:
$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, x) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(0, 1, 1)\}$

$$(x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$$

Utilizando o método de Guass, teremos que:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-x \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right]$$

Assim, temos que: $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x - y + z = 0\}$.

Caracterizando W_2, teremos que:
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, x) = \beta_1(1, 1, 1) + \beta_2(1, 0, 0)\}$

$$(x, y, z) = (\beta_1 + \beta_2, \beta 1, \beta 1)$$

Utilizando o método de Guass, teremos que:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \Leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow_{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow_{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & z-y \end{array}\right]$$

Assim, temos que: $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y = 0\}$.

Resolvendo:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que: $z = y$. Substituindo na primeira, obteremos que: $x = 0$.
$\therefore W_1 \cap W_2 = \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $W_1 \cap W_2 = [(0, 1, 1)]$.

(8) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : onde\ a \in \mathbb{R} \right\}$

(9) Temos que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Assim podemos escrever qualquer elemnto de $w \in W$, como:
$w = (x, y, z) = (x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, com $x, z \in \mathbb{R}$.
Logo, $S = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto de geradores para W.

(10) Temos que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x; y = \frac{x}{2}\}$. Assim podemos escrever qualquer elemnto de $w \in W$, como:
$w = (x, y, z) = (x, \frac{x}{2}, -x) = x(1, \frac{1}{2}, -1)$, com $x \in \mathbb{R}$.
Logo, $S = \{(1, \frac{1}{2}, -1)\}$ é um conjunto de gerador para W.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.