UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Disciplina: ***Álgebra I*** **Prof°.** ***Victor Martins***

Lista 5: Números primos, MDC e MMC

(1) Determine todos os números primos p tais que $3p+1$ seja um quadrado perfeito.

(2) Encontre todos os pares de primos p e q tais que $p-q=3$.

(3) Calcule o menor número natural n para o qual $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ e $n+5$ são todos compostos.

(4) Mostre que 7 é o único número primo da forma n^3-1.

(5) Mostre que todo número primo que deixa resto 1 quando dividido por 3 também deixa resto 1 quando dividido por 6.

(6) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números inteiros com $n \geq 2$, e p um número primo. Mostre que se $p|a_1a_2\cdots a_n$, então $p|a_i$ para algum i.

(7) Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

(8) Mostre que se p for um número primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

(9) Seja a um número natural, tal que $a \geq 2$. Considere a decomposição em fatores primos

$$a = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_n^{r_n},$$

em que $n \geq 1$, $r_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e os fatores primos p_i são todos distintos.

(a) Mostre que todos os divisores b de a são da forma

$$b = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_n^{s_n},$$

em que $0 \leq s_i \leq r_i$, para todo $i = 1, \ldots n$.

(b) Conclua que o número de divisores positivos de a (incluindo 1 e a) é dado pelo produto

$$(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_n+1).$$

(10) (a) Mostre que todo número natural ímpar é da forma $4k+1$ ou $4k-1$, em que k é um inteiro positivo.

(b) Mostre que todo número da forma $4k-1$ tem pelo menos um fator primo da mesma forma.

(c) Mostre que existem infinitos primos da forma $4n - 1$.

(11) Mostre que se p for primo e $p \nmid a$, então $mdc(a, p) = 1$.

(12) Utilize o algoritmo da divisão para calcular $d = mdc(a, b)$ e escrever $d = ax + by$, sendo:

(a) $a = 232$ e $b = 136$;

(b) $a = 187$ e $b = 221$;

(c) $a = -25$ e $b = 5$;

Em seguida, calcule o mínimo múltiplo comum dos pares a e b dados.

(13) (a) Mostre que $mdc(a, b)$ divide $a - b$.

(b) Mostre que $mdc(a, b) = mdc(a - b, b)$.

(14) Mostre que dois inteiros consecutivos são sempre primos entre si.

(15) Mostre que, se existem x e y inteiros tais que $ax + by = 1$ então $mdc(a, b) = 1$.

(16) Se $d = ax + by$, é verdade que $d = mdc(a, b)$?

(17) Se $d = mdc(a, b)$ e x e y são tais que $ax + by = d$, mostre que $mdc(x, y) = 1$.

(18) Mostre que $mdc(a, b) = mdc(a, b + ax)$ para todo inteiro x.

(19) Se $mdc(n, 6) = 1$, mostre que $12|(n^2 - 1)$.

(20) O mdc entre dois números inteiros positivos é 10 e o maior deles é 120. Determine todos os inteiros que satisfazem essa condição.

(21) Sejam a e b inteiros não nulos e $m > 0$ um natural. Mostre que:

(a) $mdc(ma, mb) = m \cdot mdc(a, b)$;

(b) $mmc(ma, mb) = m \cdot mmc(a, b)$.

(22) Sejam a e b inteiros não nulos tais que $mdc(a, b) = 1$. Então, para todo inteiro $m > 0$, $mdc(a^m, b^m) = 1$.

(23) (a) Mostre que, se a e b forem inteiros não simultaneamente nulos, então o $mdc(a, b)$ é o menor elemento de

$$S = \{ax + by : \ x, y \in \mathbb{Z}, \ ax + by > 0\}.$$

(b) Mostre que $mdc(a, b)$ é o único divisor comum de a e b que se escreve como combinação linear desses números.

(24) Mostre que se r e s são inteiros positivos tais que $mdc(r, s) = mmc(r, s)$ então $r = s$.

(25) Mostre que se r e s são inteiros, então $mdc(r, s)$ sempre divide $mmc(r, s)$.