UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra linear* - Prof. *Victor Martins*

Prova Substitutiva - 07/02/2023

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: *(2,0 pontos)* Dê a definição dos seguintes itens abaixo:

(a) Subespaço vetorial

(b) Conjunto linearmente independente e linearmente dependente

(c) Base de um espaço vetorial

(d) Dimensão de um espaço vetorial

(e) Transformação linear

(f) Núcleo de uma transformação linear

(g) Isomorfismo de espaços vetoriais

(h) Operador diagonalizável

Questão 2: *(3,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

(a) (   ) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to P_4(\mathbb{R})$ sobrejetora.

(b) (   ) A aplicação $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $T(A) = detA$ é uma transformação linear.

(c) (   ) O conjunto $S = \{(1, -3, 4), (3, 2, 1), (1, -1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

(d) (   ) O conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas abaixo é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{e} \qquad \alpha(x, y) = (\alpha y, \alpha x).$$

(e) ( ) O conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial real de $M_2(\mathbb{R})$.

(f) ( ) O conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial real de $M_2(\mathbb{R})$.

Questão 3: *(5,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

(a) ( ) Sejam

$$W_1 = \{(x, y, z, w) : \ x + y = w - z \quad \text{e} \quad y + w = 0\} \qquad \text{e}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, w) : \ x = y = 0 \quad \text{e} \quad 2w + z = 0\}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$. Então $dimW_1 = 2$, $dimW_2 = 1$ e $dim(W_1 + W_2) = 3$.

(b) ( ) Seja $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a aplicação derivada primeira. Então $[D]_\alpha^\beta$ é uma matriz triangular superior, onde $\beta = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ e $\alpha = \{1, x, x^2\}$ são bases de $P_2(\mathbb{R})$.

(c) ( ) Se $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$, então $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(d) ( ) O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$ é diagonalizável.

(e) ( ) A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (3x + y, -2x - 4y + 3z, 5x + 4y - 2z)$$

é um isomorfismo.

BOA PROVA!