UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 1 - 11/04/2018

Questão 1:

(a) Utilizando a mudança de coordenadas para coordenadas polares, isto é

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\text{sen}\theta,$$

note que

$$(x,y) \to (0,0) \Rightarrow r \to 0^+,$$

pois $r^2 = x^2 + y^2$. Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\text{sen}\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0^+} r\cos\theta\text{sen}\theta = 0,$$

pois $\cos\theta\text{sen}\theta$ é limitada.

(b) O limite não existe. Note, por exemplo, que se calcularmos o limite ao longo do caminho $x = 1$, teremos

$$\lim_{y\to 2} \frac{y}{y-2}.$$

Mas este último limite não existe, já que os limites laterais são distintos.

(c) Calculando o limite ao longo do eixo x $(y = 0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

E calculando ao longo da reta $y = x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2}.$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe.

Questão 2: Note que a superfície dada pode ser escrita como $F(x,y,z) = 0$, onde

$$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2.$$

(a) O plano tangente a essa superfície no ponto (a,b,c) é dado por

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2a(x-a) - 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax + by - cz + \underbrace{c^2 - a^2 - b^2}_{F(a,b,c)} = 0 \Leftrightarrow ax + by - cz = 0.$$

Observe que $F(a,b,c) = 0$, pois (a,b,c) é um ponto da superfície dada.

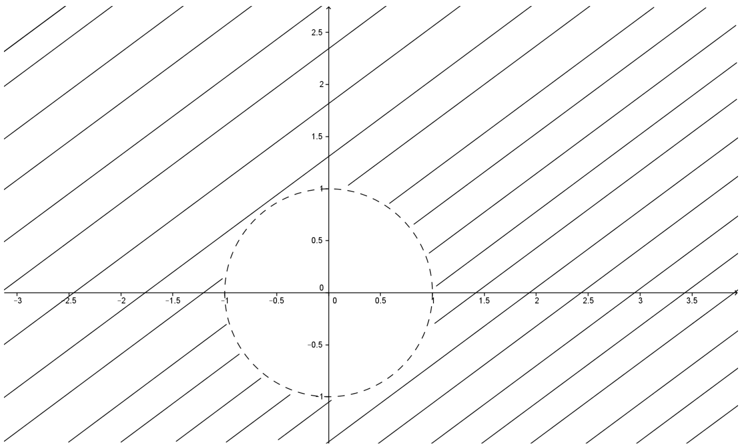
(b) O plano xy tem equação $z = 0$. Fazendo a intersecção com a equação encontrada no item (a) temos

$$ax + by - c \cdot 0 = 0 \Rightarrow ax + by = 0.$$

Questão 3:

(a) O domínio de f é o conjunto

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

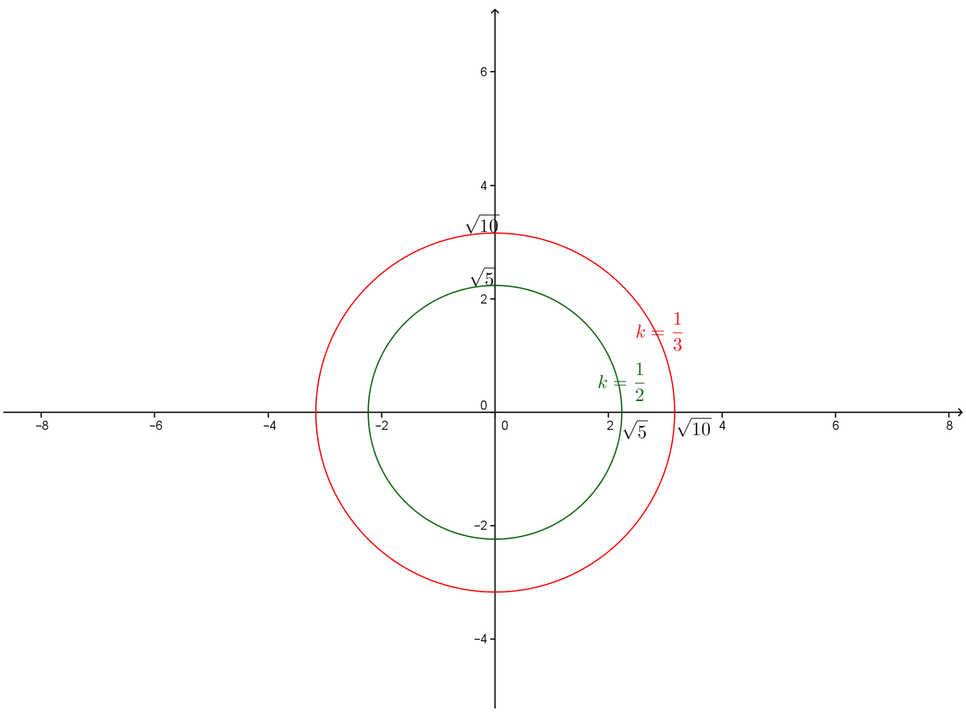


(b) Se $k = \frac{1}{3}$ então

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10.$$

Se $k = \frac{1}{2}$ então

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5.$$



(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2-1}}}{x^2+y^2-1} \cdot e^s + \frac{-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2-1}}}{x^2+y^2-1} \cdot 1 \\
&= -\frac{xe^s}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{(xe^s+y)}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= -\frac{x}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ye^t}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{(x+ye^t)}{(x^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Questão 4: Mostremos que f não é contínua em $(0,0)$ e consequentemente f não é diferenciável em $(0,0)$. Observe que $f(0,0)=0$. E

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ao longo do eixo $x\,(y=0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

Ao longo da reta $y=x$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe e daí a função não é contínua em $(0,0)$.

Questão 5 :

(a) $\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (-y^2e^{-xy}, e^{-xy}(1-xy))$.

(b) Como f é diferenciável, a derivada direcional de f na direção de um vetor unitário $u=(a,b)$ $(a^2+b^2=1)$ no ponto $(0,2)$ será

$$
\begin{aligned}
D_u f(0,2) &= \nabla f(0,2)\cdot u \\
&= (-4,1)\cdot(a,b) = -4a+b.
\end{aligned}
$$

Daí, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -4a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos

$$a = 0 \Rightarrow b = 1 \quad \text{e}$$
$$a = -\frac{8}{17} \Rightarrow b = -\frac{15}{17}.$$

Portanto as direções procuradas são as direções dos vetores $(0, 1)$ e $\left(-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$.

(c) Não, pois o maior valor da taxa de variação é $||\nabla f(0, 2)|| = \sqrt{17}$ e as direções do item (b) nos dão uma taxa de variação com valor 1.