UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Pró-Reitoria de Graduação
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Tutoria em Álgebra Linear

Módulo 12: Autovalores e autovetores

Ementa: Autovalores e autovetores; polinômio característico; diagonalização de operadores.
Objetivos: Calcular os autovalores e autovetores de um operador linear dado e compreender a utilização destes na diagonalização de operadores.

Dado um operador linear $T : V \to V$, dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de T se existir um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = cv$. O vetor v, neste caso, é chamado **autovetor** de T associado a c.

O subespaço vetorial de V definido por

$$A_c = \{v \in V : \ T(v) = cv\}$$

é chamado **autoespaço** de T associado a c.

Exemplo 1 *O operador $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x, y + 2x)$ é tal que todo vetor $v = (x, -x) \in \mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$, é um autovetor de T associado ao autovalor $c = -1$.*

Exemplo 2 *O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, tem $c_1 = 1$ como autovalor de T, cujos autovetores associados são da forma $v_1 = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, com $x^2 + y^2 \neq 0$. Outro autovalor de T é $c_2 = 0$, com os autovetores associados da forma $c_2 = (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$, com $z \neq 0$.*

Se $dimV = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T.

Exemplo 3 *O operador $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2z, x + z, y - 2z)$ tem 3 autovalores distintos e 3 é justamente igual a dimensão do espaço: $c_1 = 1, c_2 = -1$ e $c_3 = -2$. Os autovetores associados a esses autovalores, serão respectivamente:*

$z(2,3,1)$, com $z \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$;

$z(-2,1,1)$, com $z \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$;

$z(-1,0,1)$, com $z \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$.

Nesse caso, existe uma base β do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T:

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(2,3,1), (-2,1,1), (-1,0,1)\}$$

1 Polinômio característico

Sejam $T : V \to V$ um operador linear sobre o espaço vetorial de dimensão finita V, com $dimV = n$ e α uma base de V. Chamaremos de **polinômio característico** de T o polinômio definido por

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]_\alpha^\alpha).$$

Assim, $c \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, c é uma raiz de $p_t(x)$, isto é, se $p_T(c) = 0$.

Exemplo 4 *Encontre o polinômio característico e os autovalores da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (3x, 3y)$.*
Solução:
Sendo α, base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos que a matriz da transformação da aplicação T, será:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinôminio característico da transformação T, por meio da definição:

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]) = \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot(x-3) - 0 = (x-3)\cdot(x-3)$$

$$\therefore p_T(x) = (x-3)\cdot(x-3).$$

Os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim:

$$p_T(c) = (c-3)\cdot(c-3) = 0$$

$$c - 3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 3$$

$$c - 3 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 3$$

$\therefore c_1 = c_2 = 3$ *é autovalor de T.*

Exemplo 5 *Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (5x - 6y - 6z, -x + 4y + 2z, 3x - 6y - 4z)$, determine seu polinômio carcaterístico e suas respectivas raízes.*

Solução:

Sendo α base canônica do $\mathbb{R}^3$, teremos que a matriz da transformação da aplicação T, será:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinôminio característico da transformação T, por meio da definição:

$$\begin{aligned} p_T(x) = det(xI_n - [T]) &= \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= (x-5) \cdot (x-4) \cdot (x+4) + 36 + 36 - (-18(x-4) - 12(x-5) + 6(x+4)) \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1) \cdot (x-2)^2 \end{aligned}$$

$\therefore p_T(x) = (x-1) \cdot (x-2)^2$.

As raízes de $p_T(x)$, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim:

$$p_T(c) = (c-1) \cdot (c-2)^2 = 0$$

$$c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$(c-2)^2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 2$$

Exemplo 6 *Encontre o polinômio característico e os autovalores do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.*

Solução:

Sendo α a base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos que a matriz da transformação de T será:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos obter o polinômio característico da transformação T por meio da definição:

$$\begin{aligned}
p_T(x) = det(xI_n - [T]) &= \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1) \cdot (x+1) - 1 \\
&= x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2
\end{aligned}$$

$\therefore$ *$p_T(x) = x^2 - 2$ e os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim,*

$$p_T(c) = c^2 - 2 = 0$$

$$c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

$$c_1 = \sqrt{2}; c_2 = -\sqrt{2}$$

$\therefore c_1 = \sqrt{2}; c_2 = -\sqrt{2}$ *são autovalores de T.*

2 Diagonalização de operadores

Um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita é **diagonalizável** se for possível representá-lo por uma matriz diagonal em alguma base de V.

O operador linear $T : V \to V$ possui uma base α tal que a matriz $[T]^\alpha_\alpha$ é diagonal se, e somente se, essa base α for formada por autovetores de T.

Exemplo 7 *Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (y, x)$. Determine o polinômio característico, autovalores, autovetores e a matriz diagonal, caso exista, da transformação T.*

Solução:

Sendo α, base canônica do $\mathbb{R}^2$, teremos que a matriz da transformação da transformação T em relação a base α, será:

$$[T]^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos obter o polinômio característico da transformação T por meio da definição:

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]) = \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}.$$

$\therefore$ *$p_T(x) = x^2 - 1$ e os autovalores da transformação poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim,*

$$p_T(c) = c^2 - 1 = 0$$

$$c^2 = 1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{1}$$

$$c_1 = 1; c_2 = -1$$

$\therefore$ *$c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, são autovalores de T.*
Agora, determinaremos os autovetores. Logo, para $c_1 = 1$, teremos que:

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x, y) = c_1(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = 1(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

Assim, os autovetores de T associados a c_1 são da forma: $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$. Para $c_2 = -1$, teremos que:

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x, y) = c_2(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = -1(x, y) \Leftrightarrow y = -x$$

Assim, os autovetores de T associados a c_2 são da forma: $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$.
Note que a $dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e os autovetores v_1 e v_2 são linearmente independentes. Então teremos uma base β, para o $\mathbb{R}^2$, formada por esses autovetores do operador T:

$$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base β, pela transformação T, como combinação linear dos elementos de β, teremos:

$$T(1, 1) = (1, 1) = 1(1, 1) + 0(1, -1)$$

$$T(1, -1) = (-1, 1) = 0(1, 1) - 1(1, -1)$$

$\therefore$ *A matriz diagonal que representa T, com relação a base β é:*

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8 *Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, -y, z)$ e a base canônica $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Se possível, determine:*

1. *Polinômio característico de T;*
2. *Autovalores;*
3. *Autovetores;*
4. *Matriz de diagonalização.*

Solução

1. *Teremos que a matriz da transformação da aplicação T em relação a base β, será:*

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o polinômio característico de T, será:

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]) = \left| x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

$\therefore p_T(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = (x-1)^2 \cdot (x+1).$

2. *Os autovalores da transformação, poderão ser obtidos por meio de $p_T(c) = 0$. Assim,*

$$p_T(c) = (c-1)^2 \cdot (c+1) = 0$$

$$(c-1)^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$c + 1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -1$$

Note que o autovalor $c_1 = 1$, tem multiplicidade algébrica igual a 2, e o autovalor $c_2 = -1$ tem multiplicidade algébrica igual a 1.

3. *Para $c_1 = 1$, teremos que:*

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x,y,z) = c(x,y,z) \Leftrightarrow (x+y, -y, z) = 1(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ -y = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Logo, os autovetores de T associados a c_1 são da forma:

$$v_1 = (x, 0, z) = x(1,0,0) + z(0,0,1)$$

Para $c_2 = -1$, teremos que:

$$T(v) = cv \Leftrightarrow T(x,y,z) = c(x,y,z) \Leftrightarrow (x+y, -y, z) = -1(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -x \\ -y = -y \\ z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, os autovetores de T associados a c_2 são da forma:

$$v_2 = (x, -2x, 0) = x(1, -2, 0)$$

4. *Note que a $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e os vetores que geram os autovetores de T são linearmente independentes. Daí, teremos uma base α para o $\mathbb{R}^3$, formada por autovetores do operador T:*

$$\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -2, 0)\}$$

Escrevendo as imagens dos elementos da base α, pela transformação T, como combinação linear dos elementos de α, teremos:

$$T(1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 0, 1) + 0(1, -2, 0) = (0, 0, 1)$$

$$T(1, -2, 0) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 0, 1) - 1(1, -2, 0) = (-1, 2, 0)$$

Portanto, a matriz diagonal que representa T, com relação a base α é:

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3 Exercícios

(1) Calcule os autovalores das seguintes matrizes:

(a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(2) Verifique se os vetores dados, são autovetores das matrizes correspondentes:

(a) $v = (-2, 1)$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $v = (-2, 1, 3)$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x + y)$, determine seu polinômio carcaterístico e suas respectivas raízes.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. Considere os vetores $v_1 = (2, 1), v_2 = (-1, 1), v_3 = (2, 3)$ e $v_4 = (4, 4)$, identifique os que são autovetores de T e determine seus autovalores.

(5) Determine o polinômio característico, autovalores e autovetores das seguintes transformações:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$.

(6) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$.

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Determine os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por autovetores de T. Qual a representação matricial de T nesta base?

(7) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine a matriz diagonal.

(8) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por autovetores de T.

(9) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear, definiada por $T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z)$. Mostre que não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T.

(10) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o polinômio característico de T;

(b) Calcule os autovalores e autovetores de T;

(c) Determine a matriz diagonal.

Referências

[1] ARAÚJO, T. *Álgebra linear: Teoria e Aplicações.* 1ª edição. Coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[2] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.* 2ª edição. Ed USP, São Paulo, 2005.

[3] HEFEZ, A.; FERNADEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear.* 2ª edição. Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2016.