UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra linear* - Prof. *Victor Martins*

Prova 1 - 18/05/2022

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: *(2,0 pontos)*

(a) Verifique se $\mathbb{R}^3$ com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas a seguir é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az).$$

(b) Considere $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais positivos e defina a operação de adição, denotada por $\oplus$, e uma multiplicação por escalares reais, denotada por $\otimes$, da seguinte forma:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad k \otimes x = x^k.$$

Sabe-se que com essas operações $\mathbb{R}_+$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Neste caso, que elemento representa o simétrico de $x \in \mathbb{R}_+$? Justifique.

Questão 2: *(2,0 pontos)* Resolva e classifique os sistemas lineares abaixo:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y + z = 9 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$

Questão 3: *(1,0 ponto)* Sejam dados em $\mathbb{R}^3$ os seguintes planos

$$x + ky + z = -1;$$

$$x + y - z = 1;$$

$$y + kz = 1.$$

Determine para quais valores de k os três planos possuem uma reta em comum e determine as equações paramétricas dessa reta.

Questão 4: *(1,0 ponto)* Seja A uma matriz quadrada de ordem 2. Mostre que se $AB = BA$ para toda matriz quadrada B de ordem 2, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = aI_2$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2..

Questão 5: *(4,0 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre, se a afirmação for verdadeira, dê um contraexemplo, se for falsa.

(a) (   ) Se A e B são matrizes quadradas simétricas então AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

(b) (   ) A função $f : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $f(A) = detA$ é sobrejetora.

(c) (   ) Se $det(AB) = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

(d) (   ) A soma de duas matrizes inversíveis é sempre uma matriz inversível.

BOA PROVA!