UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Cálculo C* - Prof. *Victor Martins*

GABARITO - PROVA 3 - 20/06/2018 - Turma 1

Questão 1: A região E é dada pelo seguinte conjunto

$$E = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 3x \le y \le 3,\ 0 \le z \le \sqrt{9 - y^2}\}.$$

Daí temos,

$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_{3x}^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} z\, dz dy dx = \frac{27}{8}.$$

Questão 2: Usando a mudança de variáveis dada por

$$u = y - x, \quad v = y + x,$$

obtemos $x = \frac{v-u}{2}$ e $y = \frac{v+u}{2}$ e daí o jacobiano da mudança de variáveis será:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$

A região D será transformada por essa mudança de variáveis em uma região no plano uv limitada pelas retas $u = -v$, $u = v$ e $v = 2$. Portanto,

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx dy = \int_0^2 \int_{-v}^v \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}}\, du dv = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

Questão 3: Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$x = \frac{r}{3}\cos\theta, \quad y = \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

Daí em nossa região de integração R teríamos $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e r vai variar de 0 até a elipse. Agora note que a equação da elipse com a mudança de variáveis ficaria $r = 1$, logo $0 \le r \le 1$.

O jacobiano da mudança de variáveis é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{r}{6}$$

Portanto temos,

$$\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\operatorname{sen} r^2) \frac{r}{6}\, dr d\theta = \frac{\pi}{24}(1 - \cos 1).$$

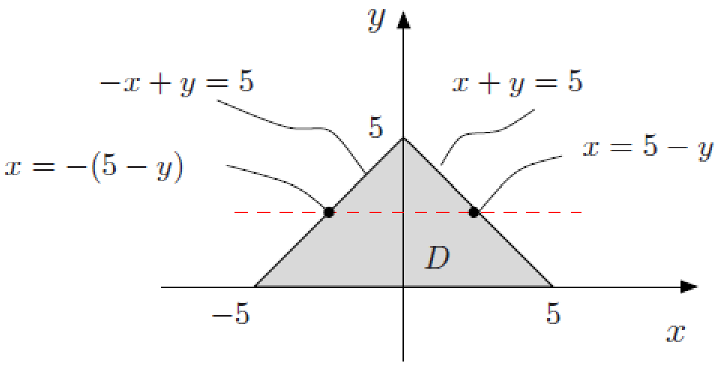
Questão 4: Note que, a região de integração B é a região situada entre os hemisférios superiores das esferas centradas na origem de raios 1 e 2. Logo, em coordenadas esféricas temos

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) : 1 \leq \rho \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Portanto,

$$\iiint\limits_B z\, dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho \cdot \cos\phi \cdot \rho^2 \cdot \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\phi d\theta = \frac{15}{4}\pi.$$

Questão Extra: Consideremos o eixo x passando pela base e o eixo y coincidindo com a mediatriz relativa à base do triângulo (placa fina). Veja figura abaixo:



Como $\rho(x, y) = 1$, então a massa dessa placa fina será

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dA = \iint\limits_D 1\, dA = \int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} dxdy = 25u.m.$$

E,

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint\limits_D x\rho(x, y)\, dA}{m} = \frac{\int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} x\, dxdy}{25} = 0;$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint\limits_D y\rho(x, y)\, dA}{m} = \frac{\int_0^5 \int_{y-5}^{5-y} y\, dxdy}{25} = \frac{5}{3}.$$

Portanto o centro de massa será em $(0, \frac{5}{3})$, isto é, situa-se a $\frac{5}{3}$ da base, sobre sua mediatriz.