UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS
Disciplina: *Álgebra I* - Prof. *Victor Martins*

Prova 2 - 18/07/2023

Nome:____Matrícula:__________

Questão 1: *(1,5 pontos)* Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Dado $a \in A$, mostre que

$$C(a) = \{x \in A : \ a \cdot x = x \cdot a\}$$

é um subanel de A.

Questão 2: *(1,5 pontos)* Verifique se $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definido por $f(x, y) = (y, x)$ é um isomorfismo de anéis.

Questão 3: *(3,0 pontos)* Considere os anéis $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ com suas operações usuais e $\pi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a projeção canônica dada por $\pi(x, y) = x$.

(a) Mostre que $I = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ x = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{I}$ e $\mathbb{Z}$ são isomorfos.

Questão 4: *(1,5 pontos)* Seja A um anel comutativo com unidade $1 \in A$, e seja P um ideal de A. Dizemos que P é um **ideal primo** de A se $P \neq A$ e para todos $x, y \in A$, se $x \cdot y \in P$ então $x \in P$ ou $y \in P$. Mostre que se P é um ideal primo de A e I e J são ideais de A tais que $IJ \subset P$, então $I \subset P$ ou $J \subset P$. (**Observação:** IJ denota o conjunto $\{ab : \ a \in I, b \in J\}$)

Questão 5: *(2,5 pontos)* Assinale **(V)** para as afirmações verdadeiras e **(F)** para as afirmações falsas. Demonstre ou dê um contraexemplo, para justificar sua resposta.

(a) ( ) $x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{2}x + \overline{2}$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$.

(b) ( ) Em $\mathbb{Z}_8[x]$, $\overline{4}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$ é um divisor de zero.

(c) ( ) Se D é um domínio de integridade, um polinômio redutível em $D[x]$, necessariamente, tem raiz em D.

(d) ( ) $\dfrac{\mathbb{Z}_3[x]}{J}$ é um corpo, onde J é o ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ gerado pelo polinômio $p(x) = x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$.

(e) ( ) $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

BOA PROVA!