Resolução P2 - Álgebra linear - 06/06/2023

Questão 1:

a)

Note que, por definição $W \subset V$.
Além disso, para $a = b = 0$, temos que
$(0,0,0) \in W$ e portanto $W \neq \emptyset$.

Sejam $u = (a,0,b)$, $v = (x,0,y) \in W$ e
$k \in \mathbb{R}$. Daí,

$$u + v = (a,0,b) + (x,0,y) = (a+x, 0, b+y) \in W$$

e

$$k.u = k(a,0,b) = (ka, 0, kb) \in W.$$

Portanto, W é subespaço de V.

———— // ————

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Observe que, $A, B \in W$, pois $\det A = 0$ e $\det B = 0$,

mas $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e daí

$\det(A+B) = 1$. Logo $A+B \notin W$.

Portanto, W não é subespaço vetorial de V.

Questão 2:

Note que,

$$U+V = \{(x,y,0)+(z,z,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x+z, y+z, z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, observe que para $z = c$, $y = b-c$ e $x = a-c$, temos que $(a,b,c) \in U+V$.

Logo, $U+V=\mathbb{R}^3$.

E ainda,

$$U\cap V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{z=0}_{\text{condição de } U} \text{ e } \underbrace{x=y=z}_{\text{condição de } V}\}$$

Logo,

$$U\cap V=\{(0,0,0)\}$$

e então a soma $U+V$ é direta.

Portanto, $\mathbb{R}^3=U\oplus V$.

//

Questão 3:

Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ tais que

$$xu+yv=(0,0) \Leftrightarrow$$

$$x(1-a, 1+a) + y(1+a, 1-a) = (0,0)$$

$$(x - ax, x + ax) + (y + ay, y - ay) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x - ax + y + ay = 0 \\ x + ax + y - ay = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \implies$$

$$\begin{cases} x - ax + y + ay = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \implies \boxed{x = -y}$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$-y + ay + y + ay = 0 \implies 2ay = 0$$

Se $a \neq 0$, então $y = 0$ e consequentemente $x = 0$.

Portanto, u e v são LI.

—— // ——

Questão 4:

a) $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ 2x-y+w=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=2y-2x$ $\Rightarrow w=y-2x$

$U=\{(x,y,2y-2x,y-2x): x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{(x,0,-2x,-2x)+(0,y,2y,y): x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\{x(1,0,-2,-2)+y(0,1,2,1): x,y\in\mathbb{R}\}$

$=\langle(1,0,-2,-2),(0,1,2,1)\rangle$

Note que, o conjunto $S=\{(1,0,-2,-2),(0,1,2,1)\}$ gera U e é LI, já que um vetor não é múltiplo escalar do outro.

Portanto, S é base de U e $\dim U=2$.

b) $\begin{cases} 3x-3y+z=0 \\ y+w=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=3y-3x$ $\Rightarrow w=-y$

$W = \{(x, y, 3y-3x, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, 0, -3x, 0) + (0, y, 3y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1, 0, -3, 0) + y(0, 1, 3, -1) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1, 0, -3, 0), (0, 1, 3, -1) \rangle$.

Note que, $B = \{(1, 0, -3, 0), (0, 1, 3, -1)\}$ é um conjunto gerador de W e ainda é LI, já que um vetor não é múltiplo escalar do outro. Logo B é base de W e então $\dim W = 2$.

//

e) $U \cap W$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 & \text{(i)} \\ 2x - y + w = 0 & \text{(ii)} \\ 3x - 3y + z = 0 & \text{(iii)} \\ y + w = 0 & \text{(iv)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{w = -y}$$

De (ii) temos

$2x - y + w = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = y}$

De (i), se $x = y$,
então $\boxed{z = 0}$

Logo, temos

$x = y = -w$ e $z = 0$

Daí

$U \cap W = \{(-w, -w, 0, w) : w \in \mathbb{R}\}$

$= \{w(-1, -1, 0, 1) : w \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1, -1, 0, 1) \rangle$.

O conjunto $A = \{(-1, -1, 0, 1)\}$ é base de $U \cap W$, pois gera o espaço e é LI, já que é um conjunto unitário formado por um vetor não nulo.

Portanto, $\dim U \cap W = 1$.

//

Questão 5:

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Queremos mostrar que existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,1,1) + c(0,1,-1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = x \\ a+b+c = y \\ a+b-c = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = x}$$

$2a + 2b = y + z \Rightarrow$

$2x + 2b = y + z \Rightarrow \boxed{b = \frac{y+z-2x}{2}}$

$c = y - a - b \Rightarrow$

$c = y - x - \left(\frac{y+z-2x}{2}\right)$

$$\boxed{c = \frac{y-z}{2}}$$

Portanto, $\langle S \rangle = \mathbb{R}^3$.

//

Questão 6:

a) F, pois $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$

—— // ——

b) F, pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, logo qualquer conjunto com mais que 3 vetores é LD.

—— // ——

c) F, como $\dim P_3(\mathbb{R}) = 4$, qualquer conjunto com menos de 4 polinômios não pode gerar $P_3(\mathbb{R})$.

—— // ——

d) F, considere por exemplo, o conjunto $S = \{(1,1), (2,2)\}$.

S tem 2 vetores, mas S não é base de $\mathbb{R}^2$, já que o conjunto é LD, uma vez que um vetor é múltiplo escalar do outro:

$$(2,2) = 2(1,1).$$

—— // ——