P1 - Álgebra Linear - Turma CC
25/05/2022

Questão 1:

a) $\mathbb{R}^2$ com as operações definidas no exercício não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. De fato, sejam $1, -1 \in \mathbb{R}$ e $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que,

$$(1 + (-1))u = 0 \cdot u = 0 \cdot (2,1) = (0,1)$$ e

$$1 \cdot u + (-1)u = 1(2,1) + (-1)(2,1)$$
$$= (2,1) + (-2,1) = (0,2),$$

ou seja,

$$(1+(-1))u \neq 1u + (-1)u.$$

//

b) Seja e o vetor nulo de $\mathbb{R}_+$, daí sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}_+$, temos

$$x \oplus e = x,$$

isto é,

$$x \cdot e = x \Rightarrow e = 1.$$

Portanto, o vetor nulo de $\mathbb{R}_+$ é 1.

—————— // ——————

Questão 2:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & -7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_3+2L_1}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2-L_1}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 11 & -5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_3-6L_2}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1-2L_2}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -z = 1 \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow y + 2z = -1 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow x - z = 3 \Rightarrow x = 2$

$S = \{(2, 1, -1)\}$

sistema possível determinado

—————— // ——————

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 10 & 14 & 7 \end{array}\right) \xRightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

observe que da última linha teríamos $0 = 1$, um absurdo. Portanto o sistema não tem solução.

Sistema impossível.

//

Questão 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1-a \\ 0 & 1 & b & -b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \\ 2 & 1 & (a+1) & 1-a-b \end{array}\right)$$

$L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1$
$\Longrightarrow$
$L_4 \leftrightarrow L_4 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1-a \\ 0 & 1 & b & -b \\ 0 & 1 & 1-a & a-b \\ 0 & 1 & 1-a & a-b-1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3$
$\Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1-a \\ 0 & 1 & b & -b \\ 0 & 1 & 1-a & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Observe que, independente dos valores de a e b, teremos da última linha do escalonamento acima, $0 = -1$, um absurdo. Portanto o sistema não admite solução.

—— // ——

Questão 4:

Seja $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz genérica de ordem 2, tal que $AB = BA$.

Daí temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = a+b & \Rightarrow \boxed{b=0} \\ a+c = c+d & \Rightarrow \boxed{a=d} \\ b+d = d \end{cases}$$

Portanto, as matrizes que comutam com A são da forma

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}$$

—— // ——

Questão 5:

a) (V)

Sejam A e B simétricas, isto é,

$A^t = A$ e $B^t = B$. Daí

$$(AB+BA)^t = (AB)^t + (BA)^t = B^tA^t + A^tB^t$$
$$= BA + AB = AB + BA.$$

Portanto $(AB+BA)$ é simétrica.

—— // ——

b) (F)

Sejam, por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, $\det A = \det B = 2$, mas $A \neq B$.

—— // ——

e) (F)

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daí

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

É $\det A = 2 = \det(-A)$.

—————— // ——————

d) (V)

Se A é inversível, existe A^{-1} matriz inversa de A tal que

$$A^{-1} \cdot A = I.$$

Assim

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot 0$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)\, B = 0$$

$$\Rightarrow I \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

—————— // ——————